三导丛书

数学物理方程与特殊函数

(南工·第三版)

导教·导学·导考

张慧清
吴小吟　编
杨小军

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是按照理工科数学物理方程与特殊函数教学大纲编写的。主要内容包括定解问题的提出，分离变量法，行波法与积分变换法，拉普拉斯方程的格林函数法，贝塞尔函数，勒让德多项式以及数理方程的差分解法等。全书共七章，每章给出内容要点、基本要求，及对一些典型例题的分析；另外，给出了原南京工学院数学教研组编写的《工程数学——数学物理方程与特殊函数》(第三版)课后习题详解，本书可与之配套使用，也可独立使用。

本书可作为该课程教学、学习和考试辅导书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数导教·导学·导考/ 张慧清，吴小吟，杨小军编．—西安：西北工业大学出版社，2005．6 (三导丛书)

ISBN 7－5612－1924－5

Ⅰ．数… Ⅱ．①张… ②吴… ③杨… Ⅲ．①数学物理方程－高等学校－教学参考资料②特殊函数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①O175．24②O174．6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 030870 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072
电 话：029－88493844，88491757
网 址：www．nwpup．com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开 本：850 mm×1168 mm 1/ 32
印 张：7．35
字 数：183 千字
版 次：2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
定 价：10．00 元

前　　言

数学物理方程与特殊函数课程是理工科专业学生的一门重要的数学课程。该门课程涉及到的物理背景知识较多，且和许多数学分支联系紧密，许多学生反映学习起来较难。为此，我们编写了本书。力求阐明该课程的主要内容要点及重点难点，精心挑选了一些典型例题，并对其所涉及的物理背景及数学工具做了详尽的分析和解答，希望能对读者有所启发。

本书共七章，每章分为四大知识板块组成：

一、内容要点　系统地阐述了该章要点，便于读者理清思路。

二、基本要求　指明了读者应对该章内容掌握的程度。

三、例题分析　力求涵盖各类题型，使读者更好地巩固基本概念，掌握解题方法和技巧。

四、习题全解　对原南京工学院数学教研组编写的《工程数学——数学物理方程与特殊函数》（第三版）课后习题给出了配套解答。

此外，全书最后附了两套模拟题，供读者自测。

本书第一、二章由吴小吟编写，第三、四、五章由张慧清编写，第六、七章由杨小军编写，最后由张慧清统稿。

由于编者水平有限，谬误之处在所难免，诚望读者批评指正。

编　者

2005 年 4 月

目　　录

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

1.1　内容要点

一、基本概念

1. 偏微分方程的相关概念

(1)含有自变量、未知函数及其各阶偏导数的关系式称为偏微分方程,出现在方程中的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶数。

一般地,含有 n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 k 阶偏微分方程可写成如下形式:

$$F\left(x, u, Du, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})$, F 是其变元的已知函数,它可以不必显含未知函数 u 及其自变量 x,但必须含有未知函数的偏导数。

(2) 线性方程:如果一个偏微分方程对于未知函数及其各阶偏导数是线性的,则称为线性偏微分方程。

一般地,n 个自变量的二阶线性偏微分方程可写成如下形式:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f$$

这里 a_{ij}, b_i, c, f 都是 n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的已知函数。不失

一般性,可以假设 $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, \cdots, n)$, f 称为方程的自由项。

注:线性偏微分方程一个很重要的特性是叠加原理。

(3) 齐次方程:若线性偏微分方程中的自由项 $f = 0$,则称方程为线性齐次偏微分方程,否则称为非齐次的。

(4) 偏微分方程的解:如果一个函数在其自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的某变化范围内连续,并且具有方程中出现的一切连续偏导数,将它代入方程后使其成为恒等式,则称该函数是方程的解或古典解。

2 . 定解问题的相关概念

(1) 定解问题:

① 泛定方程:通常称偏微分方程为泛定方程。

② 定解条件:把初始条件、边界条件等附加条件称为定解条件。

泛定方程和定解条件往往是作为一个整体提出来的,称为定解问题。

(2) 通常研究最多的两大类定解问题:

① 柯西问题:只有初始条件,而无边界条件的定解问题,又称初值问题。

② 混和问题:既有初始条件,又有边界条件的定解问题,又称初边值问题。

(3) 定解问题的适定性:

若一个定解问题的解满足如下三个准则:

① 解存在,至少存在一个解;

② 解惟一,至多存在一个解;

③ 解稳定,当定解条件和自由项发生微小的变化时,解的变化也很微小。

二、三类基本方程的定解问题

(1) 方程具体形式:

方程类型	方程形式及说明	典 型 例 子
波动方程	$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f$ 属于此类的物理问题有: 弦、膜的横振动,电报方程,流体力学与声学方程,地磁波方程等	弦的自由振动　$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 弦的受迫振动　$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ 其中 $u(x, t)$ 表示横向位移,$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$(振动在弦上的传播速度),$\rho$为单位长上的质量(质量的线密度),$T$ 为张力,$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$,$F(x, t)$ 为单位弦长上所受的横向力
热传导方程	$u_t - a^2 \nabla^2 u = f$ 属于此类的物理问题有:热传导方程,扩散问题等	无热源的热传导方程　$u_t - a^2 u_{xx} = 0$ 有热源的热传导方程　$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ 其中 $u(x, t)$ 表示温度函数,$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$($a$ 为温度传导系数),k为热传导系数,c为比热,ρ为密度,$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$(热源功率密度),$F(x, t)$ 为单位时间单位体积内发出的热量
泊松方程	$\nabla^2 u = f$ 属于此类的物理问题有:稳定的温度、浓度分布,静电场,无旋稳恒电流场等	无荷区的静电场 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ 这里,$f \equiv 0$,方程为拉普拉斯方程 有荷区的静电场 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 其中 $u(x, y, z)$ 表示静电场的电位,ρ为电荷密度,ε为介质的介电常数

(2) 相应的定解条件:

初始条件

方程类型	初始条件个数	初始条件的一般形式
波动方程	方程中含时间的二阶导数,故给两个初始条件	初始位移 $u\|_{t=0}=\varphi(x)$ 初始速度 $u_t\|_{t=0}=\psi(x)$
热传导方程	只含时间的一阶导数,只给一个初始条件	初始状态 $u\|_{t=0}=\varphi(x)$
泊松方程	描述稳恒状态,与初始状态无关,不提初始条件	

边界条件

边界条件的类型	边界条件的形式	一些说明
第一类	$u\|_S=f_1$	① S 表示区域的边界 ② n 表示 S 的外法线方向 ③ 三类边界条件对上述三类典型方程均适用 ④ 在边界的不同部分上边界条件的类型可能不同 ⑤ $f_i(i=1,2,3)$ 都是定义在边界 S 上(一般来说,也依赖于 t) 的已知函数
第二类	$\frac{\partial u}{\partial n}\|_S=f_2$	
第三类(混和边界)	$(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n})\|_S=f_3$	

1.2　基本要求

(1) 正确理解偏微分方程定解条件、定解问题、初始条件、边界条件、定解问题适定性等基本概念。

(2) 弄清三类典型方程各自对初始条件的要求。

(3) 正确理解三种类型的边界条件的意义,并能正确判断边界条件与泛定方程中的外力或外源。

(4) 掌握推导数学物理方程的一般步骤,会用“隔离物体法”导

出弦振动方程、热传导方程、泊松方程等。

1.3　例题分析

1. 导出方程

解题思路:

(1) 数学物理方程都是根据物理规律推导出来的,不同的物理问题遵循不同的物理规律,因此,对于一个物理问题,首先要弄清它遵循哪些基本物理定律。这样,推导数理方程才有了依据。

(2) 具体推导过程中主要采用"隔离物体法",也就是在系统中划出一"微元体",将有关的物理定律用于这一"微元体",建立它的运动方程,然后取趋向于无穷小的极限,保留最低阶小量,略去较高阶小量,就可得到所需的偏微分方程。

例1-1　绝对柔软而均匀的弦线有一端固定,垂直悬挂,在重力作用下,拉它一下再放手,使之作微小横振动,试导出振动方程。

解　设弦长为 l,建立坐标系如图1-1所示。

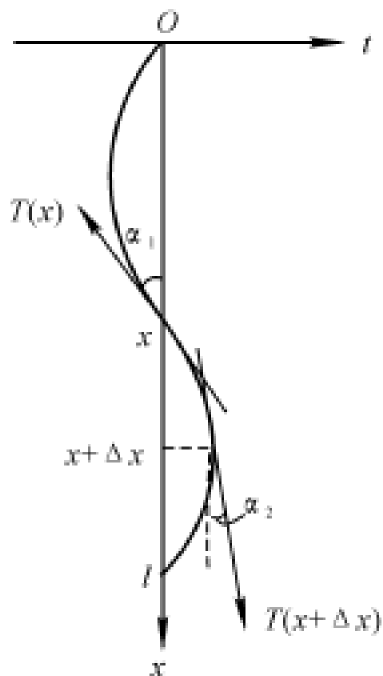


图1-1

用 $u(x, t)$ 表示弦在时刻 t, x 处的横向位移。用"隔离物体法",从弦上任取位于 x 到 $x+\Delta x$ 之间的线元,分析作用在其上的力。由弦是绝对柔软的假定,弦的张力 T 的方向总是沿着弦的切线方向,又由弦作微小振动的假定,有 $u_{xx} \leq 1$。因此,可认为在振动过程中弦不伸长,且张力 T 与时间无关。

纵向受到的力:(ⅰ) 张力 $T(x)\cos\alpha$; $T(x+\Delta x)\cos\alpha$;(ⅱ) 重力 $\rho g\Delta x$。

横向受到的力:(ⅰ) 张力 $T(x)\sin\alpha$;

$T(x+\Delta x)\sin\alpha$;(ii) 惯性力 $\rho\Delta x\bar{u}_{tt}$。

其中,ρ为弦的密度,$\bar{u}$为线元的平均位移。由牛顿第二定律得

$$\text{纵向}\quad T(x+\Delta x)\cos\alpha - T(x)\cos\alpha = -\rho g\Delta x \tag{1.1}$$

$$\text{横向}\quad T(x+\Delta x)\sin\alpha - T(x)\sin\alpha = \rho\Delta x\bar{u}_{tt} \tag{1.2}$$

由式(1.1)得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\rho g$$

对上式关于 x 积分,并利用在 $x=0$ 处,张力大小恰等于弦的自重 $\rho g l$,得

$$T(x) = \rho g(l-x).$$

又
$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x(x+\Delta x, t)$$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x(x, t)$$

将上述结果代入式(1.2)得

$$[T(x)u_x]\Big|_{x+\Delta x} - [T(x)u_x]\Big|_{x} = \rho\Delta x\bar{u}_{tt} \tag{1.3}$$

对式(1.3)左端应用微分中值定解,并约去等式两端 Δx,然后令 $\Delta x\to 0$,得

$$[T(x)u_x]\Big|_{x} = \rho u_{tt}$$

利用 $T(x)$ 的表达式,即得弦的横向位移满足的方程

$$u_{tt} = g[(l-x)u_x]_x$$

例1-2 设有一密度热传导系数和截面都均匀的杆,侧面绝热,无热源作用试导出一维杆的热传导方程。

解 见图1-2,用 $u(x,t)$ 表示时刻 t 杆上 x 处的温度,用隔离物体法,在杆上任取一微元$(x, x+\Delta x)$,在 t 到 $t+\Delta t$ 时刻内流入 A 的热量为 $q_{进}\cdot S\cdot\Delta t$,自 A 通过底面2流出的热量为 $q_{出}\cdot S\cdot\Delta t$,这里 S 是杆的截面积,热量的净流入量为

$$Q = (q_{进} - q_{出})S\Delta t$$

由傅里叶定律

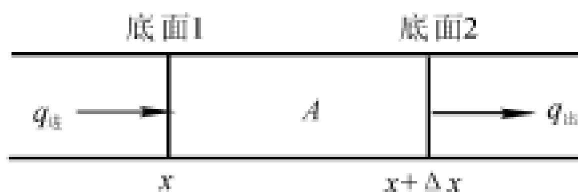


图 1－2

$$q_{进}=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x},\quad q_{出}=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}$$

其中 k 为热传导系数,则

$$Q=\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}\right)S\Delta t=$$

$$S\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\theta_1\Delta x}\Delta x\Delta t\quad(0<\theta_1<1)$$

在 Δt 时间内,微元 A 内热量的改变为

$$c\rho S[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]\Delta x=c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t+\theta_2\Delta t}\Delta x\Delta t$$

$$(0<\theta_2<1)$$

其中 c 为比热,ρ 为密度,由能量守恒定律得

$$c\rho S\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t+\theta_2\Delta t}\Delta x\Delta t=S\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\theta_1\Delta x}\Delta x\Delta t$$

两边同时约去 $\Delta x,\Delta t$,再令 $\Delta x,\Delta t\to 0$,得欲求的热传导方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

这是一维热传导方程。

2. 定解条件的确定

定解条件一般有初始条件和边界条件,若方程的非齐次项为时间的周期函数或边界条件为时间的周期函数,在考虑方程的稳态解时($t\to\infty$ 的极限下),可以不提初始条件,另外要注意的一点是:考

虑到极坐标系和球坐标下定解问题的物理意义,有时需要附以有界性条件或周期性条件,这类情形在第二章分离变量法中时常遇到。

例 1 - 3　试阐述三类边界条件,并给出实例加以说明。

解　(i) 第一类边界条件:如果未知函数在区域 S 上的值已给出,以 $\varphi(p, t)$ 表示,其中 p 表示 S 上的动点,即

$$u\,|_S = \varphi(p, t)$$

eg1:在杆的热传导问题中,若在端点 $x = a$ 处,温度随时间的变化规律 $\varphi(t)$ 已知,则在该点处的边界条件为第一类边界条件,即

$$u\,|_{x=a} = \varphi(t)$$

eg2:在弦的横振动问题或杆的纵振动问题中,若端点 $x = a$ 是固定的,则该点处位移为零,即

$$u\,|_{x=a} = 0$$

(ii) 第二类边界条件:如果未知函数的法向导数在区域 S 上的值为已知,以 $\varphi(p, t)$ 表示, p 为 S 上动点,即

$$\left.\frac{u}{n}\right|_S = \varphi(p, t)$$

eg3:杆的传热问题中,若在杆端 $x = a$ 处绝热,绝热这个条件不能直接给出杆的温度变化规律,却表明此杆端处没有热流,即热流强度为零,根据热传导的傅里叶定律,有

$$-k\left.\frac{u}{n}\right|_{x=a} = 0 \tag{1.4}$$

即

$$\left.\frac{u}{n}\right|_{x=a} = 0$$

若已知杆端 $x = a$ 处有强度为 $f(t)$ 的热流进入杆内,则边界条件为

$$k\left.\frac{u}{n}\right|_{x=a} = f(t) \tag{1.5}$$

式(1.4),(1.5)中的 n 是指杆端 $x = a$ 处的外法向量。

若 $x = a$ 是杆的左端点, n 的正向与 x 轴正向相反,即 $\frac{u}{n} = -$

$\frac{u}{x}$,故式(1 .5) 可改写为

$$\left.\frac{u}{x}\right|_{x=a} = -\frac{1}{k}f(t)$$

若 $x = a$是杆的右端点,则 n与 x 轴同向,式(1 .5) 即为

$$\left.\frac{u}{x}\right|_{x=a} = \frac{1}{k}f(t)$$

eg3 中推导的边界条件均为第二类的。

eg4:考虑杆的纵振动问题,设杆的右端点 $x = l$受力密度为 $F(t)$ 的纵向外力作用,试推出此边界条件。

在杆的右端 $x = l$旁截取一小段$[l - \Delta x, l]$ 进行分析(见图 1－3),作用于此小段的合力为: $F(t)S - \sigma(l - \Delta x, t)S$(S为横截面积)

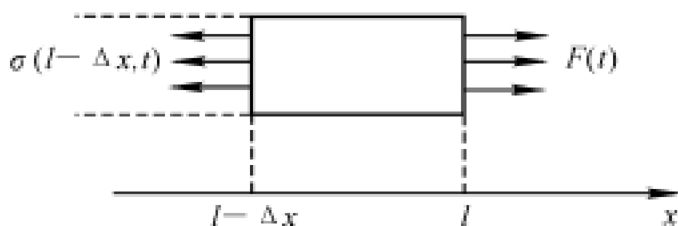


图 1－3

根据牛顿定律,有

$$[F(t) - \sigma(l - \Delta x, t)]S = \rho\cdot S\Delta x\cdot\frac{^2 u}{t^2}$$

令 $\Delta x\to 0$,并由胡克定律,即得

$$E\cdot\left.\frac{u}{x}\right|_{x=l} = \sigma(l, t) = F(t)$$

即

$$\left.\frac{u}{n}\right|_{x=l} = \frac{1}{E}F(t)$$

特别地,如果杆端 $x = l$处是自由的,即不受任何外力作用,则

$$\left.\frac{u}{n}\right|_{x=l} = 0$$

这里的边界条件都是属于第二类的。

(iii) **第三类边界条件:在边界上,未知函数和它的法向导数的某个线性组合的值为已知的,即**

$$\left(\alpha u + \beta \frac{u}{n}\right)\bigg|_S = \phi(p, t)$$

eg5:**设杆在端点** $x = a$ **处与温度为** u_0 **的杆外介质有热交换,自由冷却,试推出此边界条件。**

我们考察在杆中无限贴近于端($x = a$ **) 面** S **的平面块** D**,由于在两面** D, S **间的杆微段上热量不能累积,因此在平面块** D **上的热流应等于端面** S **上的热流。流过** D **的热量由傅里叶定律确定,而流过端面** S **的热量我们依据另一个热传导的实验定律(牛顿定律)来确定,即从一种介质流到另一种介质的热量与两介质的温度差成正比,即**

$$\Delta Q = h(u - u_0)\Delta S \Delta t$$

其中比例常数 $h(> 0)$ **称为两种介质的热交换系数,从而有**

$$-k\frac{u}{n}S\Delta t = h(u - u_0)S\Delta t$$

即

$$\left(u + \sigma \cdot \frac{u}{n}\right)\bigg|_{x=a} = u_0$$

其中记 $\sigma = k/h$

eg6:**在弦振动情形下,若弦的右端** $x = l$ **固定在弹性支承上,如图 1-4 所示,推导此边界条件。**

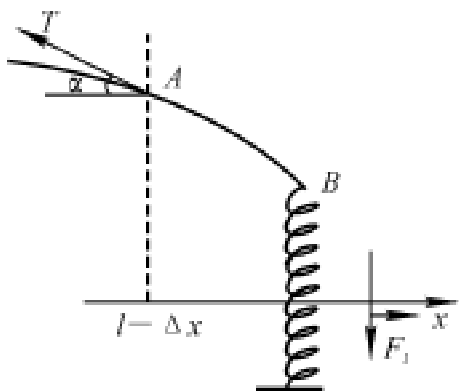


图 1-4

如图 1-4 所示,支承的弹性回复力 F_l **与支承的伸缩满足虎克定律**

$$F_l = -k_l u$$

作用于弧段 AB **上的合力沿** u **方向的分力为**

$$(T + F_l)_u = T\sin\alpha - k_l u \approx T[-\tan(\pi - \alpha)] - k_l u =$$

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-\Delta x} - k_l u\bigg|_{x=l}$$

使该小段产生加速度,根据牛顿定律有

$$-T\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l-\Delta x} - k_l u\bigg|_{x=l} = \rho\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

令 $\Delta x\to 0$,即得

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}+k_l u\right)\bigg|_{x=l} = 0$$

同理,若弦的左端点 $x=0$ 连结在弹性支承上,则其边界条件为

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}-k_0 u\right)\bigg|_{x=0} = 0$$

如果振动弦的端点连结在弹性支承上,且受持续外力作用,则其边界条件成为

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}+k_l u\right)\bigg|_{x=l} = \mu(t)$$

$$\left(T\frac{\partial u}{\partial x}-k_0 u\right)\bigg|_{x=0} = v(t)$$

这些都是第三类边界条件。注意到上述弦振动问题中当 $k_l(k_0)\ll T$,即弹性支座约束力非常小时,就看作弦端处于自由状态或只受横向外力作用的情况,相应的边界条件便成为第二类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0\qquad\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0\right)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \frac{1}{T}\mu(t)\qquad\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{T}v(t)\right)$$

例 1-4　长为 L 的均匀弦,两端固定,仅由于下列原因作微小的横振动,试分别写出其定解问题。

(1) 受线密度为 $F(x)\sin\omega t$ 的横向力的作用;

(2) 在点 x_0 受谐变力 $F_0\sin\omega t$ 的横向作用;

(3) 在点 x_0 以 F_0 把弦拉开,然后突然撤去外力。

解　(1) 线密度为 $F(x)\sin\omega t$ 为 x,t 的二元函数,显然应该处理为方程的非齐次项。定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \dfrac{F(x)\sin wt}{\rho} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

这里没有给出初始条件。由于自由项是周期函数,可以将此题作为“没有初始条件”的定解问题来处理,该问题的解反映的是“稳恒”态,即 $t \to \infty$ 时的极限。

(2) 若将 x_0 点受的谐变力写成整个弦上的受力 $F(x)\delta(x - x_0)\sin\omega t$,则定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \dfrac{F(x)\delta(x - x_0)\sin\omega t}{\rho} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

(3) 这里实质上是给出了初始位移。如图 1－5 所示,设平衡时 x_0 的横向位移为 h, y 轴的力满足平衡式:

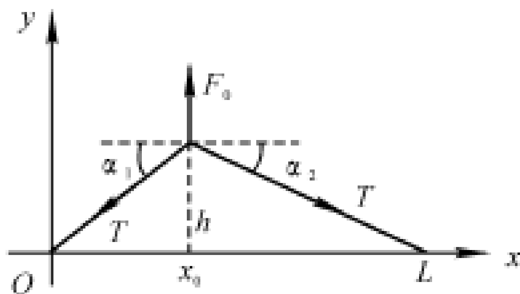


图 1－5

$$F_0 = T\sin\alpha_1 + T\sin\alpha_2$$

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{h}{x_0}, \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{h}{l - x_0}$$

所以

$$F_0 \approx \left(\frac{h}{x_0} + \frac{h}{l - x_0}\right)T = \frac{Thl}{x_0(l - x_0)} \quad h = \frac{F_0 x_0(l - x_0)}{Tl}$$

又初始位移函数满足

$$\begin{cases} \dfrac{u(x,0)}{h} = \dfrac{x}{x_0} & (0 \leq x \leq x_0) \\ \dfrac{u(x,0)}{h} = \dfrac{l-x}{x_0} & (x_0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

所以定解问题可以写为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{F_0(l-x_0)}{Tl} x \\ \dfrac{F_0 x_0}{Tl}(l-x) \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

例 1－5　长为 l 的杆,上端固定在电梯的顶板上,杆身竖直,下端自由。电梯下降过程中,当速度为 v_0 时突然停止。试写出杆振动的定解问题。

解　如图1－6所示,坐标上,$x=0$ 端为固定端,位移为0,即 $u(0,t)=0$。而 $x=l$ 端为自由端,由例1－3中eg4知 $u_x(l,t)=0$。这样边界条件就确定了,为第一、二类边界条件。

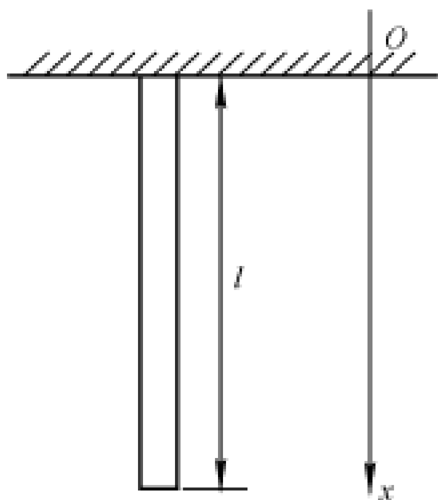


图1－6

以电梯突然停止的时刻为 $t=0$,该时刻即为杆振动的起始点,在此时刻之前,杆只是作平动,无振动。由于 $t=0^-$ 时无振动,故各点的初位移为0,即 $u(x,0)=0$,而 $t=0^+$ 时,各点均有速度 v_0,故另一个初始条件为 $u_t(x,0)=v_0$。

综上定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = v_0 \end{cases}$$

例 1－6 设有一厚壁圆筒,其初始温度为 u_0,并设它的内表面的温度增加与时间 t 成线性关系,外表面按牛顿冷却定律进行热交换,试写出该热传导问题的定解条件。

解 见图 1－7,显然初始条件为 $u(r,0) = u_0 \quad (a \leq r \leq b)$。

现在考虑边界条件,因为在内表面 $x = a$ 上温度增加和时间 t 成线性关系,设

$$u(a,t) = ct + d$$

由 $u(r,0) = u_0$,知 $d = u_0$

则

$$u(a,t) = ct + u_0 \, (0 \leq t < \infty, 是常数)$$

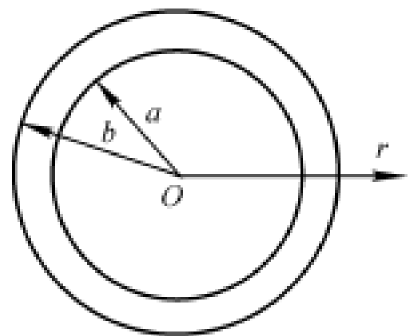


图 1－7

因为在外表面 $r = b$ 上按牛顿定律进行热交换,设周围介质的温度为 θ,则由类似于例 1－3 中 eg5 的分析知,从外表面流出的热流强度 $(-ku_r)$ 与温度差 $(u(b,t) - \theta)$ 之间的关系为

$$-ku_r(b,t) = h[u(b,t) - \theta]$$

即

$$(u + \sigma u_r)\big|_{r=b} = \theta \quad \left(\sigma = \frac{k}{h}\right)$$

其中 k 为热传导系数,h 为热交换系数。这是第三类非刘次边界条件。

因此该热传导问题的定解条件为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_0 \quad (a \leq r \leq b) \\ u\big|_{r=a} = ct + u_0, (u + \sigma u_r)\big|_{r=b} = \theta \end{cases}$$

例 1－7 写出描述下面物理模型的定解问题。

设一圆膜边界固定,周围介质阻力可以忽略不计,且该膜的初始偏移与速度均为径向对称分布,试给出描述由这种初始状态引起的膜的微小振动的定解问题。

解　圆膜作无阻尼微小横振动,故振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) \tag{1.6}$$

由于这里区域为圆域,我们采用平面极坐标系,设 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,而 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,于是

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho}$$

同理可得

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\sin\theta}{\rho} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\cos\theta -$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\frac{\sin\theta}{\rho} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} +$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\sin^2\theta}{\rho} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}$$

同上式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} +$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\cos^2\theta}{\rho} - 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}$$

所以

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} =$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \tag{1.7}$$

注意到此振动完全由径向对称分布的初始状态引起,也即初始条件只依赖于圆膜上点到圆心的距离 ρ,与角度无关,故膜上各点任一时刻位移应与角度无关。这样一来,方程在极坐标(ρ,θ)下的表达式就简化为

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$$

所以该定解问题的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)$$

考虑初边值条件,由圆膜两端边界固定,于是

$$u(R,t)=0$$

又由于振动的初始偏移与速度均为径向对称分布的,故可令 $u(\rho,0)=\varphi(\rho)$, $u_t(\rho,0)=\psi(\rho)$。这样就得到了对应的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)\\ u(R,t)=0\\ u(\rho,0)=\varphi(\rho)\\ u_t(\rho,0)=\psi(\rho)\end{cases}$$

1.4　习题全解

1. 长为 l 的均匀杆,侧面绝缘,一端温度为零,另一端有恒定热流 q 进入(即单位时间内通过单位截面积流入的热量为 q),杆的初始温度分布是$\frac{x(l-x)}{2}$,试写出相应的定解问题。

解　见图 1－8,该问题是一维热传导方程,初始条件题中已给出,为

$$u(x,0)=\frac{x(l-x)}{2}\quad(0\leq x\leq l)$$

现考虑边值条件,设在 $x = 0$ 这个端点处温度为 0,则有

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0)$$

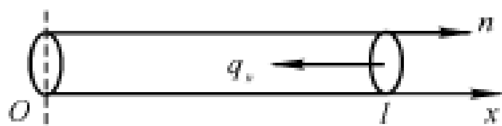


图 1－8

另一端($x = l$)处再恒定的热流 q 进入杆内,由傅里叶实验定律,在边界曲面 $\sum$ 上有

$$- k \frac{u}{n} \Big|_{\Sigma} = q_n$$

其中 q_n 为沿边界外法向的热流强度,在 $x = l$端,边界外法向就是 x 轴的正向,而现在热量是流入杆内,表明热流方向与 x 轴正向相反,故有

$$- k \frac{u}{x} = - q$$

即

$$\frac{u}{x}\Big|_{x = l} = \frac{q}{k}$$

综上所述,相应的定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = \dfrac{q}{k} \\ u(x, 0) = \dfrac{x(l - x)}{2} \end{cases}$$

2. 长为 l 的弦两端固定,开始时在 $x = c$ 受到冲量 k 的作用,试写出相应的定解问题。

解　该问题为一维弦振动问题,边界条件是显然的。由于弦两端固定,所以在这两点处位移为零,即

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

现考虑初始条件,当冲量 k 作用于 $x = c$ 处时,就相当于在这点给出了一个初速度,我们考虑以 c 点为中心,长为 2δ 的一小段弦($c - \delta, c + \delta$),设弦是均匀的,其线密度为 ρ,则这一小段弦的质量为 $2\delta\rho$,受冲击时速度为 $u_t(x, 0)$,由动量定理得

$$2\delta\rho u_t(x,0)=k \quad (c-\delta\leq x\leq c+\delta)$$

在这个小段外,初速度仍为零,我们想得到的是 $x=c$ 处受到冲击的初速度,所以最后还要令 $\delta\to 0$。此外,弦是没有初位移的,即 $u(x,0)=0$,于是初始条件为

$$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 0, & |x-c|>\delta \\ \dfrac{k}{\delta\rho}, & |x-c|\leq\delta \end{cases} \quad (\delta\to 0)\end{cases}$$

所以定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases} 0, & |x-c|>\delta \\ \dfrac{k}{\delta\rho}, & |x-c|\leq\delta \end{cases} \quad (\delta\to 0)\end{cases}$$

3. 有一均匀杆,只要杆中任一小段有纵向位移或速度,必导致邻段的压缩或伸长,这种伸缩传开去,就有纵波沿着杆传播,试推导杆的纵振动方程。

解 如图 1-9 所示,取杆长方向为 x 轴正向,垂直于杆长方向的各截面均用它的平衡位置 x 标记,在时刻 t,此截面相对

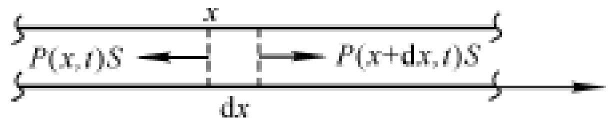


图 1-9

于平衡位置的位移为 $u(x,t)$,我们考查杆内一小段 $(x,x+\mathrm{d}x)$ 的振动情况,通过截面 x,这一小段杆受到弹性力为 $P(x,t)S$,其中 $P(x,t)$ 为单位面积所受的弹性力,即应力。规定沿 x 轴方向为正,通过截面 $x+\mathrm{d}x$ 受到的弹性力为 $P(x+\mathrm{d}x)S$,对这一小段应用牛顿第二定律,于是有

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[P(x+\mathrm{d}x,t)-P(x,t)]S$$

设杆的密度为 ρ,则 $\mathrm{d}m=\rho S\mathrm{d}x$,上式化为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

又 $x + \mathrm{d}x$ 点处的位移 $u(x+\mathrm{d}x, t) = u(x, t) + \mathrm{d}u = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，因此小段 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 的伸长(压缩)为 $\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，其相对伸长(压缩)为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，即 x 点处的应变为 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$。若略去垂直杆长方向的形变，根据 Hooke 定律，应力与应变 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 成正比，即

$$P = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

比例系数 E 称为杆的杨氏模量，故所求的纵振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$。

4. 一均匀杆原长为 l，一端固定，另一端沿杆的轴线方向被拉长 e 而静止，突然放手任其振动，试建立振动方程与定解条件。

解　该问题为杆的纵振动问题，由题 3 已知杆的纵振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0)$$

杆的一端固定，设此端为 $x = 0$ 处，则有 $u(0, t) = 0$。另一端 $(x = l)$ 放手后就为自由端，也就是在振动过程中不受外力作用，故有

$$u_x(l, t) = 0$$

边值条件已经确定，下面考虑初始条件。由于弦初始时刻处于静止状态，即初速度为 0，故 $u_t(x, 0) = 0$。而在 $t = 0$ 时，整个杆被纵向拉长 e，则单位杆长的伸长为 $\frac{e}{l}$，故 x 点处的伸长为 $\frac{e}{l}x$，即

$$u(x, 0) = \frac{e}{l}x$$

初边值条件都已确定,也就得到了该振动的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l \quad t > 0) \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \dfrac{e}{l} x, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

5. **若** $F(z), G(z)$ **是任意两个二次连续可微函数,验证**

$$u = F(x + at) + G(x - at)$$

满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

解　作自变量代换 $\xi = x + at, \eta = x - at$,**由复合函数求导法则有**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

题中所给函数 $u = F(x + at) + G(x - at)$,**经过变量代换后即为** $u = F(\xi) + G(\eta)$,**验证其是否满足方程** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ **转化为验证其是否满足** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$。

由于 F, G **均为二次连续可微函数,形为** $u = F(\xi) + G(\eta)$ **的函数** u **必满足** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$,**也即** $u = F(x + at) + G(x - at)$ **满足方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

6. **验证线性齐次方程的叠原理，即若** $u_1(x,y), u_2(x,y), \cdots, u_n(x,y), \cdots$，**均为线性二阶齐次方程**

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

的解，其中 A, B, C, D, E, F **都是** x, y **的函数，而且级数** $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x,y)$ **收敛，其中** $c_i(i=1,2,\cdots)$ **为任意常数，并对** x, y **可以逐项微分两次，求证** $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x,y)$ **仍是原方程的解。**

证明

令 $L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F$，**故有** $L(u_i)=0(i=1,2,\cdots)$。**由于其中** A, B, C, D, E, F **都只是** x, y **的函数，故** L **是线性微分算子。**

又由 $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x,y)$，**对** x, y **可逐项微分两次，且级数收敛则**

$$Lu=L\left(\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x,y)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i L(u_i)=0$$

所以 $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x,y)$ **仍是原方程的解。**

第二章　分离变量法

2.1　内容要点

一、分离变量法的物理背景及基本思想

分离变量法又称为 Fourier 方法,而在讨论波动方程时也称为驻波法。此法来源于物理事件中如下事实:机械振动或电磁振动总可以分解为具有各种频率和振幅的简谐振动的叠加。而每个简谐振动具有形式 $e^{i\omega(t+cx)} = e^{i\omega t}e^{ikx}$, $k = \omega$, 这正是物理上的驻波。从数学角度看,驻波就是只含变量 x 的函数与只含变量 t 的函数的乘积,即具有变量分离的形式。由此启发我们在解线性定解问题时,可尝试先求出满足齐次方程和齐次边界条件的具有变量分离形式的解

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

然后把它们叠加起来,记为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)T_n(t) \tag{2.1}$$

再利用初始条件确定各项中的任意常数,使其成为问题的解。

二、用分离变量法求解定解问题的五大步骤

用分离变量法求解三大类基本方程定解问题的整个过程可分为下述五步:

(1) 分离变量:将分离变量的形式代入泛定方程和边界条件,从而转化为几个常微分方程以及相应的边界条件,其中必须有一个常微分方程能够构成固有值问题。

(2) 解常微分方程的固有值问题:求出固有值及固有函数,并进而求解与每一个固有值相应的其他各常微分方程的解。

(3) 决定解的基本结构。

(4) 利用叠加原理得到级数形式的解。

(5) 利用初始条件或尚未用到的边界条件,决定叠加系数。

三、分离变量法的理论基础

1. 叠加原理

设 L 是线性微分算子,若 u_i 满足线性方程(或线性定解条件)

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 n 为有限数或 $+\infty$,则它们的线性组合

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

必满足方程(或定解条件) $Lu = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$,当出现无穷求和时,则要求级数收敛且满足 L 中出现的求偏微商与求和可交换次序的条件。

2. Strum - Liourier 理论

在 $[a,b]$ 上的 Strum - Liourier 固有值问题(即 S - L 问题)

$$\begin{cases} [P(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (a < x < b) \\ \text{第一、二、三类边界条件或周期性条件或自然边界条件} \end{cases}$$

具有下述共同结论:

(1) 存在无数个固有值 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$,它们对应着固有值问题的非零解,即对应于固有函数系 $X_1(x)$, $X_2(x),\cdots,X_n(x),\cdots$。

(2) 所有的固有值都是非负实数。

(3) 固有函数系 $\{X_n(x)\}(n = 1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 点是带权函数 $\rho(x)$ 的正交函数系,即

$$\int_a^b \rho(x)X_m(x)X_n(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq n)$$

(4) 固有函数系$\{X_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$在区间$[a,b]$上构成一个完备系。

四、非齐次泛定方程齐次边界条件的定解问题的处理

1. 固有函数展开法

固有函数展开法实质是将泛定方程的自由项及未知函数都按对应的齐次泛定方程定解问题固有函数展开成级数,然后利用原泛定方程及初始条件定出展开系数。

2. 拆分法

拆分法是将方程的定解条件按叠加原理分解为两个定解问题,假设令 $u=w+v$,其中 w 满足非齐次方程和齐次定解条件,而 v 则满足齐次方程及齐次边界条件和非零初始条件。

关于 v 的定解问题可直接采用分离变量法求解,而 w 的定解问题可采用齐次化原理,固有函数展开法等方法来求解。

现以两端固定的弦的强迫振动为例来说明齐次化原理,其定解问题为

$$(\mathrm{I})\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t) & (0<x<l,t>0) \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

若 $h(x,t;\tau)$ 是定解问题

$$(\mathrm{II})\begin{cases} h_{tt}-a^2h_{xx}=0 & (0<x<l,t>\tau) \\ h(0,t)=h(l,t)=0 \\ h(x,\tau)=0,\ h_t(x,\tau)=f(x,\tau) \end{cases}$$

的解(其中 $\tau\geq 0$ 是参数),则

$$u(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

是定解问题(Ⅰ)的解。

注:齐次化原理不适用于解泊松方程,因为泊松方程与时间无关。

五、非齐次边界条件的处理

边界条件必须是齐次的才能构成固有值问题，这是分离变量法的关键。对于非齐次边界条件的处理，其主要思想是把非齐次的边界条件化成齐次的边界条件。

一般的做法是先选取一个适当的已知函数 $v(x,t)$，令

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

使得对于新的未知函数 $w(x,t)$ 来说，边界条件是齐次的，这里 $w(x,t)$ 的泛定方程不一定是齐次的，若 $w(x,t)$ 的泛定方程非齐次，则转化为前文“四”的情形来处理。

特别地，对于含有非齐次边界条件的非齐次方程，如果边界条件是常数，方程中的自由项只是 x 的函数，则可以通过未知函数的代换同时将边界条件和方程都化成齐次的，这时只需选取一个只是 x 的函数 $v(x)$，令

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

使得对于新的未知函数 $w(x,t)$，边界条件和方程都是齐次的，于是可用分离变量法求解 $w(x,t)$?例如，求解下列定解问题:

$$(\text{I})\quad \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = u_0, u(l,t) = u_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 u_0，u 为常数。

令 $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$，选取 $v(x)$ 使

$$\begin{cases} a^2 v''(x) + f(x) = 0 \quad (0 < x < l) \\ v(0) = u_0, v(l) = u_1 \end{cases} \tag{2.3}$$

则关于 w 的定解问题就是齐次方程齐次边界条件的问题，可直接用分离变量法求解。

注:若式(2.2) 中 $u_0 = u_1 = 0$，则(I) 属于前文“四”的情形，为方便起见，仍可采用以上方法求解。

对于拉普拉斯方程，边界条件不可能是全部齐次的，否则就只有

零解。但我们总可用叠加原理化其中某一个变量的边界条件为齐次的，从而使分离出来的这个变量的常微分方程能与齐次边界条件一起构成固有值问题，也就可以直接用分离变量法求解了。

六、常用固有函数集

(1) 第一类边界条件:

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0$$

固有值以及固有函数集分别为

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

(2) 第二类边界条件:

$$u_x(0,t)=0,u_x(l,t)=0$$

固有值及固有函数集分别为

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x\quad(n=1,2,\cdots)$$

(3) 第一、二类边界条件:

$$u(0,t)=0,u_x(l,t)=0$$

固有值以及固有函数集分别为

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2,X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

(4) 第一、二类边界条件:

$$u_x(0,t)=0;u(l,t)=0$$

固有值以及固有函数集分别为

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2,X_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

(5) 二维泊松方程边值条件:

边值条件

$$\begin{cases}u(0,y)=\varphi(y),u(a,y)=\psi(y)\quad(0<x<0,0<y<b)\\u(x,0)=0,u(x,b)=0\end{cases}$$

固有值以及固有函数集分别为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, Y_n(y) = \sin\frac{n\pi}{b}y \quad (n = 1,2,\cdots)$$

边值条件

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 & (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x, 0) = \phi(x), u(x, b) = \psi(x) \end{cases}$$

固有值以及固有函数集分别为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

2.2　本章要点

(1) **理解分离变量法的基本思想,弄清其实质及适用范围。**

(2) **熟练掌握用分离变量法求解定解问题的五大步骤,会用分离变量法求解方程和边界条件都是齐次的定解问题。**

(3) **会用固有函数法求解方程是非齐次,边界条件是齐次的定解问题。**

(4) **掌握非齐次边界条件齐次化的方法。**

(5) **掌握极坐标系下圆形区域上拉普拉斯方程边值问题的求解。**

(6) **了解** Strum-Liourier **理论的一些结论。**

2.3　例题分析

一、直角坐标系下的分离变量法

1. 齐次泛定方程、齐次边界条件的定解问题

解题思路:**对于该类问题,可直接用分离变量法求解,解题的关键在于熟练掌握分离变量法的步骤。**

例 2 - 1　**试用分离变量法求解定解问题**

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \end{cases}
$$

解 ① 分离变量:令 $u(x,t) = X(x)T(t)$,代入泛定方程和边界条件,得

$$
T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{1}
$$

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (2) \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 & (3) \end{cases}
$$

② 解固有值问题(Ⅱ):对参数 λ 的取值情况分别讨论如下:

(ⅰ) 当 $\lambda < 0$,则方程(2)的解是

$$
X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}
$$

其中任意常数 c_1, c_2 由条件(3)确定,再注意到

$$
X'(x) = C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}
$$

故有

$$
\begin{cases} C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0 \\ C_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}
$$

由此解得 $C_1 = 0, C_2 = 0$,从而 $X(x) \equiv 0$,所以

$$
u(x,t) = X(t)T(t) \equiv 0
$$

显然零解是无意义的,排除 $\lambda < 0$ 的情形。

(ⅱ) 当 $\lambda = 0$ 时,方程(2)的通解为 $X(x) = C_1 x + C_2$,而 $X'(x) = C_1$,由初始条件知 $C_1 = 0$,所以 $X(x) = C_2$。

(ⅲ) 当 $\lambda > 0$,方程(2)的通解为 $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$,而 $X'(x) = -\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}x$,由初始条件(3)知 $C_2 = 0$,$C_1\sin\sqrt{\lambda}l = 0$,而 C_1 必不为零,否则 $X(x) \equiv 0$,所以 $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$,即 $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}(n = 1,2,\cdots)$,从而固有值 $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$,相应的固有函数为 $X_n(x) = C_1\cos\frac{n\pi}{l}x$。

③ **确定解的基本结构**:当 $\lambda = 0$ 时,方程(1) 即为 $T''_0(t) = 0$,解得 $T_0(t) = A_0 + B_0 t$。

当 $\lambda > 0$ 时,将固有值 λ 代入到方程(1) 中得

$$T''_n + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T_n = 0$$

其通解为　$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi}{l}t + B_n \sin \frac{an\pi}{l}t$

于是得满足方程以及初始条件的特解

$$u_n(x,t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t & (n = 0) \\ \left[A_n \cos \frac{an\pi}{l}t + B_n \sin \frac{an\pi}{l}t \right] \cos \frac{n\pi}{l}x & (n > 0) \end{cases}$$

④ **叠加过程**:定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{an\pi}{l}t + B_n \sin \frac{an\pi}{l}t \right] \cos \frac{n\pi}{l}x$$

⑤ **确定叠加系数**将 $u(x,t)$ 的表达式代入初始条件,得

$$\begin{cases} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) & (0 < x < l) \\ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) & (0 < x < l) \end{cases}$$

利用 Fourier 余弦展开系数得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \\ B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\,\mathrm{d}x, \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

例 2－2　**试用分离变量法求解定解问题**

$$(\text{I})\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

解　① **分离变量**:令 $u(x,t) = X(x)T(t)$,代入泛定方程和边界条件,得

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{1}$$

$$(\text{II})\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (2) \\ X'(0) = 0,\ X(l) = 0 & (3) \end{cases}$$

② 解固有值问题(Ⅱ):(ⅰ) 当 $\lambda \leq 0$ 时, $X(x) \equiv 0$,即 $u(x,t) \equiv 0$,故排除 $\lambda \leq 0$ 的可能性。

(ⅱ) 当 $\lambda > 0$ 时,方程(2) 的通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

而
$$X'(x) = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}x,$$

任意常数 C_1, C_2 由条件(3) 确定,即

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

由此解得 $C_2 = 0$, $C_1 \cos\sqrt{\lambda}l = 0$,而 C_1 必不为零,否则 $X(x) \equiv 0$,所以 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$,即

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

从而固有值 $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$,相应的固有函数为

$$X_n(x) = c_n \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x。$$

③ 确定解的基本结构:将固有值 λ 代入到方程(1) 中得

$$T''_n + \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2} T_n = 0$$

其通解为
$$T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t$$

这样就得到了一系列形如 $X(x)T(t)$ 的特解

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

④ 叠加过程:定解问题级数形式的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

⑤ **确定叠加系数:利用初始条件得**

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=\varphi(x) & (0<x<l)\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=\psi(x) & (0<x<l)\end{cases}$$

由函数系 $\left\{\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right\}_{n=0}^{\infty}$ **在区间** $[0,l]$ **上的正交性得**

$$\begin{cases}\displaystyle A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,\mathrm{d}x\\ \displaystyle B_n=\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,\mathrm{d}x\end{cases}$$

例 2－3　**长为** l **的均匀杆,两端受压而使杆的长度缩为** $l(1-2\varepsilon)$,**放手后杆自由振动,求解杆的这一振动。**

解　$u(x,t)$ **应满足下列定解问题**

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=-2\varepsilon x+\varepsilon l,\ u_t(x,0)=0\\ u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0\end{cases}$$

这显然为例 2－1 **的特例,这里** $\varphi(x)=-2\varepsilon x+\varepsilon l,\varphi(x)=0$,**则有**

$$B_n=0$$

$$\begin{cases}\displaystyle A_0=\frac{1}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\,\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle A_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{4[1-(-1)^n]\varepsilon l}{n^2\pi^2}\end{cases}$$

显然当 n **为偶数时,** $A_n=0$,**故令** $n=2k+1$,**由例** 1 **知**

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8\varepsilon l}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x$$

例 2－4　**弦长为** l,**两端固定,用宽为** 2δ **的余弦式凸面锤敲击弦**

的 $x = x_0$ 处,求解弦的振动。

解 在敲击弦中,弦具有某种初始速度而没有初始位移,由于锤的宽度为 2δ,故锤的敲击区间为$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$,由于锤为余弦式凸面锤,故当锤敲击弦时,以 x_0 点的初速度为最大,设这个最大速度为 v_0;而在 $x = x_0 + \delta$和 $x = x_0 - \delta$处的初速度为零,于是弦振动的定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \begin{cases} 0, (0 < x \quad x_0 - \delta, x_0 + \delta \quad x < l) \\ v_0 \cos \dfrac{x - x_0}{2\delta}\pi, (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \end{cases} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

这一定解问题的边界条件为第一类边界条件,它的固有函数为

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

其级数形式的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos \frac{an\pi}{l}t + B_n \sin \frac{an\pi}{l}t\right]\sin \frac{n\pi}{l}x$$

由于

$$\varphi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \qquad (0 < x \quad x_0 - \delta, x_0 + \delta \quad x < l) \\ v_0 \cos \dfrac{x - x_0}{2\delta}\pi \qquad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \end{cases}$$

于是

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin \frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{an\pi}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} v_0 \cos \frac{x - x_0}{2\delta}\pi \sin \frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{an\pi}v_0\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\cos \frac{\pi x_0}{2\delta}\cos \frac{\pi x}{2\delta} + \sin \frac{\pi x_0}{2\delta}\sin \frac{\pi x}{2\delta}\right]\sin \frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{4v_0\delta}{n\pi^2 a}\left[\frac{1}{1-\frac{2\delta n}{l}}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}+\frac{1}{1+\frac{2\delta n}{l}}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\right]=$$

$$\frac{8v_0\delta}{n\pi^2 a}\frac{1}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{8v_0\delta}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\times$$

$$\cos\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

例 2－5　**已知细杆的初始温度分布为 $\varphi(x)$，一端保持零度，另一端绝热，求它的温度分布。**

解　**温度分布函数 $u(x,t)$ 应是下列定解问题的解：**

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u(0,t)=0,u_x(l,t)=0 \end{cases}$$

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入泛定方程及边界条件，分离变量后得

$$T'(t)+\lambda^2a^2T(t)=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 & (2) \\ X(0)=0,X'(l)=0 & (3) \end{cases}$$

由式(2)，(3) **构成的固有值问题也是我们熟知的，其相应的固有值及固有函数分别为**

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2l},\ X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

将固有值 λ_n 代入方程(1) **解之得**

$$T_n(t)=C_n e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}$$

故定解问题的解可以写为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

利用初始条件确定系数 C_n,因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \varphi(x)$$

于是

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x$$

所以原定解问题的解

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

2. 非齐次泛定方程、齐次边界条件的定解问题

解题思路:对于该类问题用固有函数法或齐次化原理求解,用齐次化原理时注意如果初始条件是非齐次的,要先将定解问题拆成两个问题。特别地,若方程中出现的自由项只是变量 x 的函数或常数则可考虑拆分为一常微分方程的边值问题和一方程、边界条件均为齐次的偏微分方程的定解问题。

例 2-6　长为 l 的柔软细弦,两端固定,在单位弦长上单位质量所受策动力为 $\Phi(x)\sin\omega t$,已知初始位移和初始速度分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$,求其振动方程。

解　本例中欲求解的定解问题为

$$(\text{I})\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \Phi(x)\sin\omega t \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases}$$

下面用两种方法求解该问题:

方法 1(固有函数法)

与定解问题(Ⅰ)相应的齐次方程齐次边界条件的固有值问题对应的固有函数为

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = 1,2,\cdots)。$$

现把未知函数 $u(x,t)$,自由项 $\Phi(x)\sin\omega t$ 及初始函数 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 按固有函数集展开成 Fourier 级数,于是有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{1}$$

$$\Phi(x)\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{2}$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4}$$

其中 $T_n(t)$ 待定。

$$C_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(x)\sin\omega t\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{2\sin\omega t}{l}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

将式(1),(2),(3),(4) 分别代入(Ⅰ) 的泛定方程以及初始条件得

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}T''+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n=C_n(t) & (5)\\ T_n(0)=\varphi_n,\ T'_n(0)=\psi_n & (6)\end{cases}$$

由常数变易法解(Ⅱ):式(5) 对应的齐次方程的基本解组为 $\cos\frac{an\pi}{l}t,\sin\frac{an\pi}{l}t$,故可令

$$T_n(t)=a_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t$$

可得决定 $a_n(t)$ 和 $b_n(t)$ 的两个方程

$$\begin{cases}a'_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t+b'_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t=0\\ -\frac{an\pi}{l}a'_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{an\pi}{l}b'_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t=C_n(t)\end{cases}$$

解之得

$$a_n(t)=-\frac{l}{an\pi}\int_0^tC_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau+C_1$$

$$b_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int_0^tC_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{l}\tau\,\mathrm{d}\tau+C_2$$

所以

$$T_n(t) = \left(-\frac{l}{an\pi}\int_0^t C_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau + C_1\right)\cos\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\left(\frac{l}{an\pi}\int_0^t C_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau + C_2\right)\sin\frac{an\pi}{l}t$$

$$T'_n(t) = -\frac{l}{an\pi}C_n(t)\sin\frac{an\pi}{l}t\cos\frac{an\pi}{l}t -$$

$$\left(-\frac{l}{an\pi}\int_0^t C_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau + C_1\right)\frac{an\pi}{l}\sin\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\frac{l}{an\pi}C_n(t)\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\frac{an\pi}{l}\left[\frac{l}{an\pi}\int_0^t C_n(\tau)\cos\frac{an\pi}{l}\tau\mathrm{d}\tau + C_2\right]\cos\frac{an\pi}{l}t$$

由 $T_n(0) = \varphi_n$ 及 $T'_n(0) = \psi_n$ 得

$$C_1 = \varphi_n, C_2 = \frac{l}{an\pi}\psi_n$$

故 $T_n(t)$ 的表达式化为

$$T_n(t) = \varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\frac{l}{an\pi}\int_0^t C_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau =$$

$$\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\frac{2}{an\pi}\int_0^t \sin w\tau\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\int_0^1 \Phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x =$$

$$\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t +$$

$$\frac{2}{an\pi}\frac{w\sin\frac{an\pi}{l}t - \frac{an\pi}{l}\sin wt}{w^2 - \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\int_0^1 \Phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \tag{7}$$

其中

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

把式(7)代入所设的关系式(1),得到原定解问题的解。

方法2(齐次化原理)

令 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$,由叠加原理将该问题分解为下面两个定解问题:

$$(\text{II})\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = \Phi(x)\sin wt & (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0 \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$(\text{III})\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ v(x,0) = \phi(x), v_t(x,0) = \psi(x) \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0 \end{cases}$$

先由分离变量法求解(III),得其解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{an\pi t}{l} + B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \\ B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

再用齐次化原理来求解(II),为此我们先求解

$$\begin{cases} h_{tt} - a^2 h_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > \tau) \\ h\big|_{t=\tau} = 0, h_t\big|_{t=\tau} = \Phi(x)\sin\omega\tau \\ h\big|_{x=0} = 0, h\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

可用固有函数展开法来解这个定解问题,设

$$h(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau)\sin\frac{n\pi z}{l}x \tag{8}$$

$$\Phi(x)\sin\omega\tau = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{9}$$

其中

$$C_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

把式(8),(9)**代入关于** h **的定解问题的范定方程及初始条件得**

$$\begin{cases} T''_n(\tau)+(\frac{an\pi}{l})^2 T_n(\tau)=0 \\ T_n(\tau)=0,\ T'_n(\tau)=C_n(\tau) \end{cases}$$

解此常微分方程的初始值问题,得

$$T_n(\tau)=\frac{l}{an\pi}C_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau) \tag{10}$$

把式(10)**代入所设关系式**(8)**得**

$$h(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{an\pi}C_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是定解问题(Ⅱ)**的解为**

$$w(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{an\pi}\left[\int_0^t C_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\left[\int_0^t \sin\omega\tau\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^l\Phi(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\cdot\frac{w\sin\frac{an\pi}{l}t-\frac{an\pi}{l}\sin\omega t}{w^2-(\frac{an\pi}{l})^2}\left[\int_0^l\Phi(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

故原定解问题的解为

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$$

其中 $v(x,y)$, $w(x,y)$ **由上述推导过程给出。**

例 2-7　用齐次化原理求解下述定解问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

解　由齐次化原理,若 $v(x,t;\tau)$ 是定解问题

$$(\mathrm{II})\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > \tau) \\ v|_{t=\tau} = A\sin\omega\tau \\ v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

的解,则 $u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 是定解问题(Ⅰ)的解。

令 $T = t - \tau$,则定解问题(Ⅱ)变为

$$(\mathrm{III})\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 & (0 < x < l, T > 0) \\ v|_{T=0} = A\sin\omega\tau \\ v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

用分离变量法可得(Ⅲ)解为

$$v(x,T;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 T} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\omega\tau\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{4A}{(2n+1)\pi}\sin\omega\tau$$

换回变量 t,得

$$v(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 (t-\tau)} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$\int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n+1)\pi}\sin\omega\tau \mathrm{e}^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 (t-\tau)} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n+1)\pi} \frac{\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}}{\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^4} \times$$

$$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

例 2-8　求解扭转问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = -2 \quad (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = 0 \\ u(0,y) = 0, u(a,y) = 0 \end{cases}$$

解　设解可写成形式 $u = w + v$,**其中** v **是该泊松方程的特解,而** w **是相应齐次方程在第一类边界条件下的解,此处自由项** $f(x,y) = -2$ **是零次多项式,故可假设** v **具有如下形式:**

$$v(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

将 v **的表达式代入泊松方程,得** $2D + 2F = -2$。**为方便起见,我们取** $D = -1, F = 0$,**其余的系数均可取任意值。为使** w **的边界条件齐次化,选取**

$$v(x,y) = ax - x^2$$

于是便得到关于 w **的第一类边值问题**

$$(\text{I})\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b) \\ w(x,0) = -ax + x^2, w(x,b) = -ax + x^2 \\ w(0,y) = 0, w(a,y) = 0 \end{cases}$$

用分离变量法求解(Ⅰ),**令** $w(x,y) = X(x)Y(y)$,**代入**(Ⅰ)**的泛定方程和齐次边界条件,分离变量后得**

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (2) \\ X(0) = X(a) = 0 & (3) \end{cases}$$

解由式(2),(3)**构成的固有值问题,其固有值为**

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

固有函数为
$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x$$
将 λ 代入式(1) 中解得
$$Y_n(y)=A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y$$
故解的一般形式为
$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$
利用非齐次边界条件确定系数 A_n 和 B_n，因为
$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}=-ax+x^2\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}b\right]\sin\frac{n\pi}{a}=-ax+x^2\end{cases}$$
于是有
$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a(x^2-ax)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0,\ n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{-8a^2}{(n\pi)^3},\ n\text{ 为奇数}\end{cases}$$
$$A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}b=\frac{2}{a}\int_0^a(-ax+x^2)\sin\frac{n\pi}{a}x=A_n$$
故
$$B_n=\frac{\left[1-\cosh\frac{n\pi b}{a}\right]A_n}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$$
所以原定解问题的解为
$$u(x,y)=ax-x^2-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\sinh\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{a}+\sinh\frac{(2n-1)\pi y}{a}\right]}{\sinh\frac{(2n-1)\pi b}{a}}\times\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}}{(2n-1)^3}$$

注:当泊松方程的自由项 $f(x,y)$ 是 n 次多项式时,求特解的通常方法就是构造一个有待定系数的 $n+2$ 次多项式形式的解。

3.非齐次边界条件的齐次化

解题思路:对于该类问题,处理的总原理是令解写成两个函数叠加的形式,适当的选取其中的一个函数,使得另一个函数满足其定解问题的边界条件是齐次的,但方程未必是齐次的,这样就可用前面的方法处理。如果方程以及边界条件中的自由项较为特殊,适当的选取其中的一个函数,有可能使得另一个函数满足的定解问题的方程和自由项都是齐次的,从而使问题更为简化。

例 2-9 试把定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

的非齐次边界条件齐次化。

解 令 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$,设 $v(x,t) = A(t)x + B(t)$,$A(t)$ 和 $B(t)$ 都是待定函数,要使得 $w(x,t)$ 的边界条件齐次化,则有

$$\begin{cases} w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = \mu_1(t) - B(t) = 0 \\ w(l,t) = u(l,t) - v(l,t) = \mu_2(t) - A(t)l - B(t) = 0 \end{cases}$$

由此解出

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\ B(t) &= \mu_1(t) \\ v(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x \end{aligned} \tag{2}$$

将 $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ 代入泛定方程(1)得下列关于 $w(x,t)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = -\mu_1''(t) - \dfrac{x}{l}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] \\ \qquad\qquad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \dfrac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\ w_t(x,0) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \dfrac{x}{l}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \end{cases}$$

这里关于 $w(x,t)$ 的泛定方程不一定是齐次的。

例 2－10　把弦的一端 $x = 0$ 固定，迫使另一端 $x = l$ 作简谐振动 $A\sin\omega t$，弦的初始位移和初始速度都为零，试求弦的振动规律。

解　弦的振动规律 $u(x,t)$ 满足下列定解问题

$$(\text{I})\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = A\sin\omega t \end{cases}$$

现求(I)的解：

解法 1　为使边界条件齐次化，令 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$，由上例可知取 $v(x,t) = A\dfrac{x}{l}\sin\omega t$，于是得函数 $w(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = A\dfrac{x}{l}\omega^2\sin\omega t \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = -\dfrac{A\omega}{l}x \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 \end{cases}$$

用固有函数法或齐次化原理可得该定解问题的解为

$$w(x,t) = \frac{2A\omega l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,\frac{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\sin\frac{an\pi}{l}t - \frac{an\pi\omega}{l}\sin\omega t}{\omega^2 - \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\times$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{2A\omega l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\frac{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\sin\frac{an\pi}{l}t-\frac{an\pi\omega}{l}\sin\omega t}{\omega^2-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\times$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}x+A\frac{x}{l}\sin\omega t$$

解法 2 在第一种做法中 $w(x,t)$ 满足的方程是非齐次的,我们考虑选取其他形式的 $v(x,t)$,不仅能使原问题的边界条件齐次化,而且还能同时将 $w(x,t)$ 的泛定方程齐次化。

设 $v(x,t)=\frac{f(x)}{l}A\sin\omega t$,将其代入定解问题(Ⅰ)中,注意到为使得 $w(x,t)$ 的边界及方程均为齐次的,只需 $f(x)$ 满足下面的二阶常微分方程

$$\begin{cases}a^2 f''(x)+\omega^2 f(x)=0\\ f(0)=0,\ f(l)=l\end{cases}$$

解该二阶常微分方程的定解问题,得

$$f(x)=\frac{l\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}$$

故

$$v(x,t)=A\frac{\sin\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\sin\omega t$$

于是得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases}w_{tt}-a^2 w_{xx}=0\quad(0<x<l,t>0)\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=-A\omega\frac{\sin\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\\ w(0,t)=0,\ w(l,t)=0\end{cases}$$

用分离变量法解之得

$$w(x,t)=\frac{2A\omega}{al}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)=$$

$$\frac{2A\omega}{al}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x+$$

$$A\frac{\sin\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\sin\omega t$$

例 2－11　试把定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l,t>0) \\ u(x,0)=\phi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \\ u(0,t)-hu_x(0,t)=\mu_1(t), \\ u(l,t)+hu_x(l,t)=\mu_2(t) \end{cases}$$

的非齐次边界条件化为齐次边界条件。

解　令 $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$,这里的边界条件为第三类的非齐次边界条件,一般地设

$$v(x,t)=(Ax+B)\mu_1(t)+(Cx+D)\mu_2(t)$$

其中 A,B,C 和 D 都是待定的常数,而

$$v_x(x,t)=A\mu_1(t)+C\mu_2(t)$$

为使得关于 w 的定解问题的边界条件齐次化,$v(x,t)$ 须满足

$$\begin{cases} v(0,t)-hv_x(0,t)=\mu_1(t) \\ v(l,t)+hv_x(l,t)=\mu_2(t) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (B-hA)\mu_1(t)+(D-hC)\mu_2(t)=\mu_1(t) \\ (Al+B+hA)\mu_1(t)+(Cl+D+hC)\mu_2(t)=\mu_2(t) \end{cases}$$

比较对应系数得

$$\begin{cases} B - hA = 1 \\ B + (l + h)A = 0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} D - hC = 0 \\ D + (l + h)C = 1 \end{cases}$$

解以上两系数方程得

$$A = -\frac{1}{l + 2h}, B = \frac{l + h}{l + 2h}, C = \frac{1}{l + 2h}, D = \frac{h}{l + 2h}$$

通过简单计算得

$$v(x, t) = \mu_1(t) + \frac{h + x}{l + 2h}[\mu_2(t) - \mu(t)] \tag{1}$$

这样便得到下列关于 $w(x, t)$ 的齐次边界条件的定解问题,但这里关于 $w(x, t)$ 的泛定方程不一定是齐次的。

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = -\mu_1''(t) - \dfrac{h + x}{l + 2h}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] \\ \qquad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{h + x}{l + 2h}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\ w_t(x,0) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \dfrac{h + x}{l + 2h}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] \\ w(0, t) - hw_x(0, t) = 0, w(l, t) + hw_x(l, t) = 0 \end{cases}$$

注:在本例中,若令 $h \to 0$,则定解问题转化为例 2-9 的定解问题,而式(1) 变为

$$v(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

这正是例 2-9 中的式(2)。

例 2-12 一有界柔软弦在策动力 $f(x, t) = \dfrac{F}{\rho}$ 作用下振动,弦的两端分别按规律 $\mu(x), \nu(x)$ 横向运动,且弦的初始位移和速度为 $\varphi(x), \psi(x)$,求解弦的振动。

解 弦的振动函数满足定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \dfrac{F}{\rho} \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = \nu(t) \end{cases}$$

先将边界条件齐次化, **令** $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, **由例** 2－9 **知令** $v(x,t) = \mu(t) + \dfrac{\nu(t) - \mu(t)}{l}x$, **显然** $v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$, **这样关于** $w(x,t)$ **的定解问题为**

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = \dfrac{F}{\rho} - \mu''(t) - \dfrac{x}{l}[\nu''(t) - \mu''(t)] = f_1(x,t) \\ \qquad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = \varphi(x) - \mu(0) - \dfrac{x}{l}[\nu(0) - \mu(0)] = \varphi_1(x) \\ w_t(x,0) = \psi(x) - \mu'(0) - \dfrac{x}{l}[\nu'(0) - \mu'(0)] = \psi_1(x) \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 \end{cases}$$

用固有函数法或齐次化原理求解得

$$w(x,t) = \left\{ \varphi_n \cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \right\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \mu(t) + \frac{\nu(t) - \mu(t)}{l}x +$$

$$\left\{\varphi_n \cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\psi_n \sin\frac{an\pi}{l}t + \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

例 2－13　试把定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

的非齐次边界条件齐次化。

解　引进一个表示解 $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, **要使得** $w(x,t)$ **的边界条件齐次化,则有**

$$\begin{cases} w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = \mu_1(t) - v(0,t) = 0 \\ w(l,t) = u(l,t) - v(l,t) = \mu_2(t) - v(l,t) = 0 \end{cases}$$

故

$$v(0,t) = \mu_1(t), v(l,t) = \mu_2(t)$$

这时只需取

$$v(x,t) = \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x$$

这样就可以得到新的未知函数 $w(x,t)$ **的定解问题,这里关于** $w(x,t)$ **的方程不一定是齐次的,可由固有函数法以及齐次化原理求解其定解问题**

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] \\ \qquad\qquad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \end{cases}$$

例 2－14　考虑侧面绝缘的细杆热传导问题。设杆的初始温度以 u_0 **均匀分布,杆的一端保持恒温** u_0, **另一端有强度为恒值** q **的热量进入,试求杆上的温度分布。**

解　设杆上的温度分布为 $u(x,t)$,则 $u(x,t)$ 满足如下定解问题

$$
(\text{Ⅰ})\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = u_0 \\ u(0,t) = u_0, u_x(l,t) = \dfrac{q_0}{k} \end{cases}
$$

由于边界条件均为常数,我们只需构造一个只与 x 相关的函数 $v(x)$。令 $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$,为使新未知函数 $w(x,t)$ 的定解问题的边界条件齐次化,只需选取

$$
v(x) = u_0 + \frac{q_0}{k}x
$$

将 $v(x)$ 代入定解问题(Ⅰ),则得到新的未知函数 $w(x,t)$ 的定解问题。

$$
(\text{Ⅱ})\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(x,0) = -\dfrac{q_0}{k}x \\ w(0,t) = 0, w_x(l,t) = 0 \end{cases}
$$

直接分离变量后解得

$$
w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2q_0 l}{k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x
$$

所以原定解问题的解为

$$
u(x,t) = u_0 + \frac{q_0}{k} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2q_0 l}{k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x
$$

例 2 - 15　求解矩形区域内的狄里克雷问题:

$$
(\text{Ⅰ})\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b) \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = g(x) \quad (0 < x \quad a) \\ u(0,y) = h(y), u(a,y) = 0 \quad (0 < y \quad b) \end{cases}
$$

解 令 $u(x,y)=w(x,y)+v(x,y)$,其中 $w(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 分别是如下两个定解问题的解:

$$
(\text{II})\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w(x,0)=0,\ w(x,b)=0 \\ w(0,y)=h(y),\ w(a,y)=0 \end{cases}
$$

$$
(\text{III})\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ v(x,0)=0,\ v(x,b)=g(x) \\ v(0,y)=0,\ v(a,y)=0 \end{cases}
$$

用分离变量法求解定解问题(II)和(III),先求解(II):

令 $w(x,y)=X(x)Y(y)$,代入(II)的方程和齐次边界条件,分离变量后得则

$$X''-\lambda X=0 \tag{1}$$

$$
\begin{cases} Y''+\lambda Y=0 & (2) \\ Y(0)=0,\ Y(b)=0 & (3) \end{cases}
$$

解由式(2),(3)构成的固有值问题,知其固有值和固有函数分别为 $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$,$Y_n(y)=\sin\dfrac{n\pi}{b}y\ (n=1,2,\cdots)$,将 λ 代入式(1)解得 $X_n(x)$ 的通解为

$$X_n(x)=A_n\sinh\frac{n\pi}{b}x+B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x$$

故

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sinh\frac{n\pi}{b}x+B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

由边界条件得到决定 A_n, B_n 的方程

$$
\begin{cases} A_n\sinh\dfrac{n\pi}{b}a+B_n\cosh\dfrac{n\pi}{b}a=0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{b}y=h(y) \end{cases}
$$

解之得

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{b}\left[-\coth\dfrac{an\pi}{b}\right]\displaystyle\int_0^b h(y)\sin\dfrac{n\pi}{b}y\,\mathrm{d}y \\ B_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b h(y)\sin\dfrac{n\pi}{b}y\,\mathrm{d}y \end{cases}$$

故

$$w(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cosh\frac{n\pi}{b}x - \coth\frac{an\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}x\right]\times \left[\int_0^b h(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,\mathrm{d}y\right]\sin\frac{n\pi}{b}y = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi(a-x)}{b}}{\sinh\dfrac{an\pi}{b}}\left[\int_0^b h(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,\mathrm{d}y\right]\sin\frac{n\pi}{b}y$$

求解定解问题(Ⅲ),同理可得

$$v(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\left[\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$$

这样由 $u(x,y) = w(x,y) + v(x,y)$,便得到了原定解问题的解。

例 2－16　一无限长,截面为等腰直角三角形的棱柱,在截线为弦的这一侧上的电位为 U_0,令两侧面接地,求柱内的电位分布。

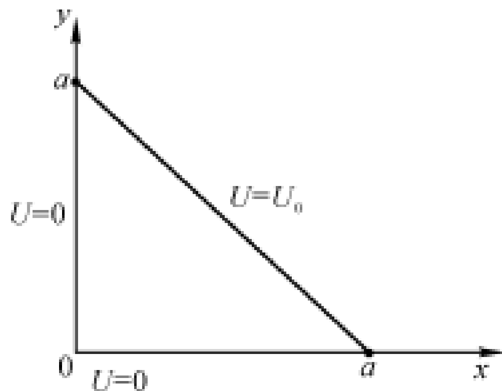


图 2－1

解　柱内电位分布应满足下面的定解问题:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}\nabla^2 U = 0 \quad (0 < x, y > a)\\ U\big|_{x+y=a} = U_0\\ U(0, y) = 0, U(x, 0) = 0\end{cases}$$

考虑令 $U(x, y) = U_0 + W(x, y)$,则新的未知函数 $W(x, y)$ 的定解问题为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}\nabla^2 W = 0 \quad (0 < x, y < a)\\ W\big|_{x+y=a} = 0\\ W(0, y) = -U_0, W(x, 0) = -U_0\end{cases}$$

进一步令 $W = H + V$,将(Ⅱ) 分解为下面关于 H 和 V 的定解问题:

$$\begin{cases}\nabla^2 H = 0 \quad (0 < x, y < a)\\ H\big|_{x+y=a} = 0\\ H(0, y) = 0, H(x, 0) = -U_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2 V = 0 \quad (0 < x, y < a)\\ V\big|_{x+y=a} = 0\\ V(0, y) = -U_0, V(x, 0) = 0\end{cases}$$

先求解关于 H 的定解问题,令 $H(x, y) = X(x)Y(y)$,分离变量后有

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{1}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{2}$$

由于 $H\big|_{x+y=a} = 0$,故

$$X(x)Y(a - x) = 0$$

所以

$$X(a)Y(0) = 0$$

而

$$H(0, y) = 0, H(x, 0) = -U_0$$

即

$$X(0)Y(y) = 0, X(x)Y(0) = -U_0$$

故

$$X(0) = X(a) = 0 \tag{3}$$

由式(2),(3) 构成的固有值问题,其固有值和固有函数是熟知的,分别为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \; X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

将 λ 代入式(1) 解之得 $Y_n(y)$ 的通解为

$$Y_n(y)=A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y+B_n\cosh\frac{n\pi}{a}y$$

其中常数 A_n, B_n **由边界条件确定。**

所以

$$H(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sinh\frac{n\pi}{a}y+B_n\cosh\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x$$

由边界条件 $H(x,0)=-U_0$,**知**

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x=-U_0,$$

于是

$$B_n=-\frac{2}{a}\int_0^a U_0\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=-\frac{2U_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\tag{4}$$

又由 $X(\frac{a}{2})Y(\frac{a}{2})=0$,**亦即** $X_n(\frac{a}{2})Y_n(\frac{a}{2})=0$,**但** $X_n(\frac{a}{2})=\sin\frac{n\pi}{2}$ $\neq 0$,**故只有** $Y_n(\frac{a}{2})=0$,**即**

$$Y_n\left(\frac{a}{2}\right)=A_n\sinh\frac{n\pi}{2}+B_n\cosh\frac{n\pi}{2}=0\tag{5}$$

将式(4)**代入式**(5)**得**

$$A_n=-B_n\coth\frac{n\pi}{2}=\frac{2U_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\coth\frac{n\pi}{2}$$

于是得到

$$H(x,y)=\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\coth\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{a}y-\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\cosh\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x=$$

$$-\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n\sinh\frac{n\pi}{2}}\left[-\cosh\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi}{a}y+\sinh\frac{n\pi}{2}\cosh\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x=$$

$$-\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n\sinh\frac{n\pi}{2}}\sinh\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

将上式中的 x, y **对换,便得到**

$$V(x,y)=-\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n\sinh\frac{n\pi}{2}}\sinh\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\frac{n\pi}{a}y$$

最后得所要求的解

$$U=U_0+H(x,y)+V(x,y)=U_0-\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

$$\left\{\sinh\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x+\sinh\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\frac{n\pi}{a}y\right\}$$

二、极坐标系下的分离变量法

解题思路:**和直角坐标系下的思路基本一致,对于有的定解问题要适当的引入自然边界条件,有的定解问题要结合一些特殊常微分方程,比如欧拉方程等来求解。**

例 2－17　**求解二维拉普拉斯方程在圆域内的第二边值问题。**

解　**设圆的半径为** a,**我们选用平面极坐标系,利用直角坐标与极坐标的关系可将二维拉普拉斯方程表示为** $\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$,(**推导过程见第一章例** 1－7) **则题中第二类边界条件的定解问题可以写为**

$$\begin{cases}\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 & (1)\\ \qquad (0<\rho<a,0<\theta<2\pi) & \\ u_\rho(a,\theta)=f(\theta)\qquad(0\leq\theta\leq 2\pi) & (2)\end{cases}$$

引入自然边界条件

$$\begin{cases} u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta) & (3)\\ \lim\limits_{\rho\to 0}u(\rho,\theta)=\text{有限值} & (4)\end{cases}$$

由分离变量法求解,令 $u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$ 代入方程(1),分离变量后得

$$\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \tag{5}$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0 \tag{6}$$

由式(3)显然有

$$\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta) \tag{7}$$

方程(5)和(7)构成固有值问题,以下讨论它的解。

① 当 $\lambda<0$ 时,方程(5)的两个线性无关的解为 $e^{\sqrt{-\lambda}\theta}$ 和 $e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$,它们不满足周期条件式(3),故排除 $\lambda<0$ 的情形。

② 当 $\lambda=0$ 时,方程(5)的两个线性无关的解是 θ 和常数,其中 θ 也不满足式(3),而常数满足式(3),故当 $\lambda=0$ 时,可得式(5)的解为 $\Phi(\theta)=$ 常数。

③ 当 $\lambda>0$ 时,$\cos\sqrt{\lambda}\theta$ 和 $\cos\sqrt{\lambda}\theta$ 是式(5)的两个线性无关的解,而只有当 $\sqrt{\lambda}$ 为整数时,它们才满足周期性条件式(3),即只有 $\lambda=n^2$,$(n=1,2,\cdots)$,这样关于 Φ 的固有值问题的固有值为 $\lambda=n^2$,$(n=1,2,\cdots)$,固有函数为 $\Phi(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta$。

现将 λ 代入式(6)中解关于 R 的方程,该方程为欧拉方程,只要令 $t=\ln\rho$,则式(5)转变为关于自变量 t 的常微分方程,解之得

$$R_n(\rho)=\begin{cases} C_0+D_0\ln\rho & (n=0)\\ C_n\rho^n+D_n\rho^{-n} & (n\neq 0)\end{cases}$$

故一般解的结构为

$$u(\rho,\theta)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})$$

再由有界性条件式(4),当 $\rho\to 0$ 时,$\ln\rho$ 和 ρ^{-n} $(n>0)$ 都为无穷大,故必有 $D_0=0$,$D_n=0$,从而

$$u(\rho,\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\rho^n$$

其中系数 C_0, A_n, B_n 由边界条件(2) 来确定,因为

$$u_\rho(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) a^{n-1} = f(\theta)$$

所以

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{na^{n-1}\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau \mathrm{d}\tau \\ B_n = \dfrac{1}{na^{n-1}\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau \mathrm{d}\tau \end{cases}$$

故

$$u(\rho,\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{na^{n-1}}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

其中 C_0 为常数,而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau \mathrm{d}\tau,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau \mathrm{d}\tau$$

例 2 - 18 求解定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0, & a < \rho < b, 0 < \theta < \alpha & (1) \\ u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0, & a < \rho < b & (2) \\ u(a,\theta) = f_1(\theta), & 0 < \theta < \alpha & (3) \\ u(b,\theta) = f_2(\theta), & 0 < \theta < \alpha & (4) \end{cases}$$

解 本题的解域是张角 α 的部分圆环区域,分离变量法求解,令 $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Phi(\theta)$,代入式(1) 和式(2),分离变量后得

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 & (6) \\ \Phi(\theta) = \Phi(\alpha) = 0 & (7) \end{cases}$$

由式(6),(7) 构成的固有值问题的固有值为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$$

固有函数为 $\Phi_n(\theta)=\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \qquad (n=1,2,\cdots)$

将 λ_n 代入式(5)，解得通解为

$$R_n(\rho)=C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

于是原定解问题的解为

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \tag{8}$$

由初始条件式(3)，(4) 得

$$u(a,\theta)=f_1(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \tag{9}$$

$$u(b,\theta)=f_2(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \tag{10}$$

将 $f_1(\theta)$，$f_2(\theta)$ 在 $[0,\alpha]$ 上按正弦函数族 $\{\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\}$ 展开成傅里叶级数，得

$$\begin{cases} C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f_1(\theta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\mathrm{d}\theta=f_{1n} & (11)\\ C_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}=\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f_2(\theta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\mathrm{d}\theta=f_{2n} & (12)\end{cases}$$

这是关于 C_n，D_n 的线性(非齐次) 代数方程组，且因 $a\neq b$，系数行列式

$$D=(ab)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(b^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}-a^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}\right)\neq 0$$

故可惟一地确定 C_n，D_n：

$$\begin{cases} C_n=\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} f_{1n} & a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\\ f_{2n} & b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\end{vmatrix} & (13)\\ D_n=\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} a^{\frac{n\pi}{\alpha}} & f_{1n}\\ b^{\frac{n\pi}{\alpha}} & f_{2n}\end{vmatrix} & (14)\end{cases}$$

当 $f_1(\theta)$ 与 $f_2(\theta)$ 不全为 0 时，C_n，D_n 不全为 0，定解问题有非零形式解式(8)，系数由式(13)，(14) 给出。

注:当 $f_1(\theta) = f_2(\theta) = 0$ 时,显见,由 $D \neq 0$ 知,式(11),(12)的惟一解为 $C_n = D_n = 0, n = 1,2,\cdots$,从而式(8)给出的即为零解。这正是拉普拉斯第一边值问题解的惟一性所包含的结果 —— 拉普拉斯方程零边值问题只有零解。

由于后面的章节中在柱坐标系和球坐标系下用分离变量法解题的需要,我们最后补充说明,如何把直角坐标系下的三维拉普拉斯方程化为柱坐标和球坐标的形式。

例 2 - 19　试导出三维拉普拉斯方程在柱坐标 (ρ, θ, z) 下的形式。

解　设 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$

则　$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,因此

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 - y^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho}$$

同理有

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta, \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\cos\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\sin\theta}{\rho} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\cos\theta -$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right]\frac{\sin\theta}{\rho} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial\rho}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\rho}+2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}$$

同理得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}+$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}-2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial z^2}$$

所以

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

例 2－20　**试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数。**

解　**由例 2－19 知,平面极坐标系中的二维波动方程为**

$$u_{tt}-a^2\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]=0 \tag{1}$$

先把时间 t **和空间变量** ρ,θ **分离,为此,令**

$$u(\rho,\theta,t)=v(\rho,\theta)T(t)$$

代入方程(1),**分离变量后得**

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{1}{v}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right]$$

上式左边只是 t **的函数,右边只是** ρ,θ **的函数,跟** t **无关,所以两边只有等同于同一常数才能相等,记** $-k^2$ **为这一常数,则有**

$$T''+k^2a^2T=0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v=0 \tag{3}$$

常微分方程(2) **的通解为**

$$T(t)=A\cos kat+B\sin kat\ \text{或}\ T(t)=Ae^{\mathrm{i}akt}+Be^{-\mathrm{i}akt}$$

再将方程(3)中的变量ρ和θ分离,为此,令 $v(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$ 代入(3)式,分离变量后得

$$\frac{1}{R}\left[\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)\right]+k^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda$$

即有

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0 & (4)\\ \rho\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+(k^2\rho^2-\lambda)R=0 & (5)\end{cases}$$

注意到方程(4)与自然边界条件

$$\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta) \tag{6}$$

构成的固有值问题,其固有值和固有函数分别为

$$\lambda=n^2\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

和
$$\Phi(\theta)=\cos n\theta+\sin n\theta$$

则方程(5)可改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2-\frac{n^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{7}$$

方程(7)也就是 n 阶贝塞尔方程,它的解法可参阅第五章。

例2-21 试导出拉普拉斯方程在球坐标(ρ,θ,φ)下的形式并进行分离变量。

解 由直角坐标和球坐标之间的关系式

$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\quad z=\rho\cos\theta$

这组关系式又可分解为两组关系式

$$\begin{cases}x=\gamma\cos\varphi\\ y=\gamma\sin\varphi\\ z=z\end{cases}\text{和}\begin{cases}r=\rho\sin\theta\\ \varphi=\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}$$

先作变换:$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$。

由例2-19立即得到

$$\nabla^2u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+u_{zz}=0 \tag{1}$$

再作变换:$r=\rho\sin\theta,\varphi=\varphi,\ z=\rho\cos\theta$,并再次用例2-19的结果就有

$$u_{rr} + u_{zz} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} \tag{2}$$

又因为

$$u_r = u_\rho \rho_r + u_\theta \theta_r = u_\rho \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{\rho} \tag{3}$$

将式(2),(3) **代入式**(1) **中,得**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} =$$

$$u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0 \tag{4}$$

接下来进行分离变量,令 $u(\rho,\theta,\varphi) = R(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$,**代入式**(4) **分离变量后得到三个常微分方程**:

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0 \tag{5}$$

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + (\lambda\sin^2\theta - \mu)\Theta = 0 \tag{6}$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \tag{7}$$

方程(7) **加上周期性条件** $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ **构成固有值问题,其相应的固有值为** $\mu = n^2\ (n = 0,1,2,\cdots)$,**固有函数为**

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

关于方程(6) **令** $\xi = \cos\theta$,**则**(6) **式化为**:

$$(1-\xi^2)\Theta''(\xi) - 2\xi\Theta'(\xi) + \left(\lambda - \frac{n^2}{1-\xi^2}\right)\Theta(\xi) = 0 \tag{8}$$

式(8) **称为连带勒让德方程,当** $n = 0$ **时,方程**(8) **即为勒让德方程。**

2.4　习题全解

1. **设弦的两端固定于** $x = 0$ **及** $x = l$,**弦的初始位称如图** 2-2 **所示,初速度为零,又设有外力作用,求弦作横向振动时的位移函数** $u(x,t)$。

解　　**如图** 2-2 **所示,弦作横向振动时初始条件为**

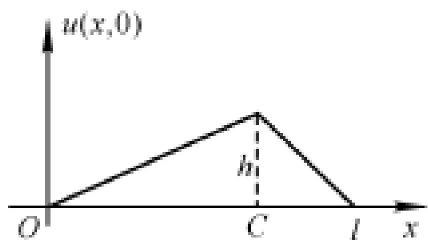


图 2-2

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x & (0\leq x\leq c)\\ \dfrac{h}{l-c}(l-x) & (c<x\leq l)\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=0$$

则 $u(x,t)$ 是下列定解问题的解:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

该定解问题的解的形式是熟知的,其解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由初始条件

$$\psi(x)=0$$

故 $B_n=0$,而由初始条件

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)$$

得

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l\frac{h}{c}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_c^l\frac{h}{l-c}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2hl^2}{\pi^2(l-c)cn^2}\sin\frac{n\pi c}{l}$$

$$B_n = 0$$

所以

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi c}{l} \cos\frac{an\pi}{l} t \sin\frac{n\pi}{l} x$$

2. 就下列初始条件及边界条件,解弦振动方程。

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x(l-x)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

解　$u(x,t)$ 是下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x(l-x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

的解,该定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{an\pi}{l} t + B_n \sin\frac{an\pi}{l} t\right) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

由初始条件来确定系数 A_n, B_n, 由于

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l} x = 0 \\ u_t(x,0) = \frac{l}{an\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l} x = x(l-x) \end{cases}$$

故

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l x(l-x) \sin\frac{n\pi}{l} x \, dx =$$

$$\frac{2}{an\pi} \left[l \int_0^l x \sin\frac{n\pi}{l} x \, dx - \int_0^l x^2 \sin\frac{n\pi}{l} x \, dx \right] =$$

$$\frac{4l^3}{n^4 \pi^4 a} (1 - \cos n\pi)$$

所以　$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^3}{n^4 \pi^4 a} [1 - (-1)^n] \sin\frac{an\pi}{l} t \sin\frac{n\pi}{l} x$$

3. **就下列初始条件及边界条件解弦振动方程。**

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} x & (0 < x \leq \frac{1}{2}) \\ 1 - x & (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases}$$

$$\frac{u}{t}\Big|_{t=0} = x(x-1)$$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0$$

解　$u(x,t)$ **为下列定解问题的解**:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < 1, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

这里

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & (0 < x \leq \frac{1}{2}) \\ 1 - x & (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases}$$

$$\psi(x) = x(x-1)$$

该定解问题的边界条件仍为第一类的,其解的形式为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$A_n = 2\int_0^l \varphi(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^{1}(1-x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^1 \psi(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{an\pi}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{4}{n^4\pi^4 a}[(-1)^n-1]$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos an\pi t+\frac{4}{n^4\pi^4 a}[(-1)^n-1]\sin an\pi t\right\}\sin n\pi x$$

4. **解出习题一中第 1 题(参阅 1.4 之 2 题)。**

解　要求解的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x)=0 \\ u_t(x,0)=\psi(x)=\begin{cases}0 & (|x-c|>\delta)\\ \dfrac{k}{2\delta\rho} & (|x-c|\le\delta)\end{cases} & (\delta\to 0)\end{cases}$$

该边界条件为第一类的,故此定解问题的级数形式的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$A_n=0$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{an\pi}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{k}{2\delta\rho}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{k}{an\pi\delta\rho}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2k}{n^2\pi^2 a\delta\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\frac{\sin\frac{n\pi\delta}{l}}{\frac{n\pi\delta}{l}}=\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{an\pi\rho}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{na\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

5. 试求适合于下列初始条件及边界条件的一维热传导方程的解。

$$u|_{t=0}=x(l-x)$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$$

解　设 $u(x,t)$ 为题设定解问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=x(l-x)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

的解,由于边界的解条件为第一类的,其级数形式的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

下面由初始条件确定 C_n。

由于　$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=x(l-x)$$

故　$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l lx\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x-\frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{4l^2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$$

所以

$$u(x,t)=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

6. 解一维热传导方程,其初始条件及边界条件为

$$u\Big|_{t=0}=x,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

解　依题意写出定解问题如下:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

用分离变量法求解,令 $u(x,t) = X(x)T(t)$,代入方程和边界条件得

$$T' + a^2\lambda T = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda x = 0 & (2) \\ X'(0) = 0,\ X'(l) = 0 & (3) \end{cases}$$

由例1的讨论知,由式(2),(3)或构成的固有值问题对应的固有值为

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

相应的固有函数为

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

将 λ 代入式(1)得

$$T_n(t) = \begin{cases} C_0 & (n = 0) \\ C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

于是定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由初始条件知

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{l}x = x$$

故有

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

7. 一根长为 l 的细杆表面绝缘,其初始温度分布如图 2-3 所示,由 $t=0$ 开始两端温度保持于零度,求杆上温度分布。

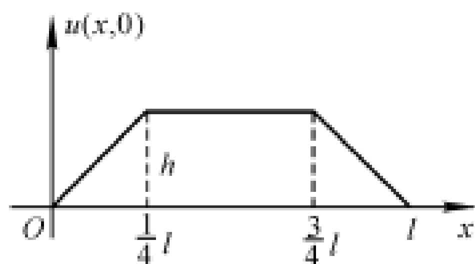


图 2-3

解　设杆上温度分布为 $u(x,t)$,依题意它满足下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{4h}{l}x & \left(0 < x \leq \dfrac{1}{4}l\right) \\ h & \left(\dfrac{1}{4}l < x \leq \dfrac{3}{4}l\right) \\ \dfrac{4h}{l}(l-x) & \left(\dfrac{3}{4}l < x < l\right) \end{cases} \end{cases}$$

该定解问题级数形式的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{1}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{4}l}\frac{4h}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx + \frac{2h}{l}\int_{\frac{1}{4}l}^{\frac{3}{4}l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx +$$

$$\frac{2}{l}\int_{\frac{3}{4}l}^{l}\frac{4h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx =$$

$$\frac{8h}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{3n\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{16h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}=$$

$$\begin{cases}0 & (n=2k)\\ \dfrac{16h}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4} & (n=2k+1)\end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

将 C_n 代入式(1)中,得

$$u(x,t)=\frac{8\sqrt{2}h}{\pi^2}\Big[e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi}{l}x+\frac{1}{9}e^{-\frac{9a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{3\pi}{l}x-$$

$$\frac{1}{25}e^{-\frac{25a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{5\pi}{l}x-\frac{1}{49}e^{-\frac{49a^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{7\pi}{l}x+\cdots\Big]$$

8. 试解出具有放射衰变的热传导方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial u}{\partial t}+Ae^{-\alpha x}=0$$

已知边界条件为 $u\big|_{x=0}=0$, $u\big|_{x=l}=0$, 初始条件为 $u\big|_{t=0}=T$(常数)

解　题述定解问题为

$$\begin{cases}u_t-\dfrac{1}{a^2}u_{xx}-\dfrac{A}{a^2}e^{-\alpha x}=0 & (0<x<l,t>0)\\ u(x,0)=T(\text{常数})\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

令其中 $\frac{1}{a}=b$, 则上面的定解问题化为

$$(\text{I})\begin{cases}u_t-b^2u_{xx}=Ab^2e^{-\alpha x}\ (0<x<l,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0\\ u(x,0)=T\end{cases}\qquad(1)$$

解上述定解问题(Ⅰ),可采用以下的三种方法:

解法1 注意到非齐次项 $Ab^2e^{-\alpha x}$ 只是 x 的函数,故可作一个代换将方程化为齐次的,并保留边界条件仍是齐次的,这时只需找一个只与 x 有关的函数 $v(x)$,使满足 $u(x,t)=w(x,t)+v(x)$,其中 $w(x,t)$ 的方程是齐次的。

现用下面的方法确定 $v(x)$,把 $u = w + v$ 代入方程(1),并使 $w(x,t)$ 的方程是齐次的,于是有

$$w_t - b^2 w_{xx} = Ab^2 e^{-\alpha x} + b^2 v''(x) = 0$$

因此
$$v''(x) = -Ae^{-\alpha x}$$

由此得
$$v(x) = -\frac{1}{\alpha^2}Ae^{-\alpha x} + Bx + C$$

其中 B, C 为任意常数,关于新的未知函数 $w(x,t)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} w_t - b^2 w_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = \frac{1}{\alpha^2}A - C \\ w(l,t) = \frac{1}{\alpha^2}Ae^{-\alpha l} - Bl - C \\ w(x,0) = T + \frac{1}{\alpha^2}Ae^{-\alpha x} - Bx - C \end{cases}$$

为使边界条件齐次化,只须

$$\frac{1}{\alpha^2}A - C = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2}Ae^{-\alpha l} - Bl - C = 0$$

解之得

$$\begin{cases} B = \frac{1}{\alpha^2}A \\ C = \frac{A(e^{-\alpha l} - 1)}{\alpha^2 l} \end{cases}$$

故
$$v(x) = -\frac{A}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha x} - \frac{x}{l}(e^{-\alpha l} - 1) - 1\right]$$

从而 $w(x,t)$ 的定解问题化为

$$(\mathrm{II})\begin{cases} w_t - b^2 w_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \phi(x) = T + \frac{A}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha x} - \frac{x}{l}(e^{-\alpha l} - 1) - 1\right] \end{cases}$$

(Ⅱ) 的定解问题级数形式的解是熟知的,为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2}{l}\int_0^l\left\{T+\frac{A}{\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-\alpha x}-\frac{x}{l}(\mathrm{e}^{-\alpha l}-1)-1\right]\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2}{l}\int_0^lT\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_0^l\frac{A}{\alpha^2}\Big[\mathrm{e}^{-\alpha x}-\\&\frac{x}{l}(\mathrm{e}^{-\alpha l}-1)-1\Big]\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2A(1-\mathrm{e}^{-\alpha l}\cos n\pi)l^2}{n\pi(\alpha^2l^2+n^2\pi^2)}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}u(x,t)=w(x,t)+v(x)=-\frac{A}{\alpha^2}\Big[\mathrm{e}^{-\alpha x}-\\\frac{x}{l}(\mathrm{e}^{-\alpha l}-1)-1\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}$$

解法 2　用固有函数展开法求解,本题中固有函数集为

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

故可令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再将 $Ab^2\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 和 T 在 $[0,l]$ 上也用 $\{\sin\frac{n\pi}{l}x\}$ 作为基本函数族展开成傅里叶级数

$$Ab^2\mathrm{e}^{-\alpha x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l Ab^2 e^{-\alpha x}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2Ab^2 n\pi}{\alpha^2 l^2 + n^2\pi^2}[1-(-1)^n b^{-\alpha l}]$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

将 $u(x,t)$, $Ab^2 e^{-\alpha x}$ **的级数展开式代入非齐次方程,得** $T(t)$ **所满足的常微分方程**

$$\begin{cases} T'_n(t) + \dfrac{n^2\pi^2 b^2}{l^2}T_n = C_n \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

解之得

$$T_n(t) = \left[\varphi_n - \left(\frac{l}{n\pi b}\right)^2 C_n\right]e^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2 t} + \left(\frac{l}{n\pi b}\right)^2 C_n$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_n - \left(\frac{l}{n\pi b}\right)^2 C_n\right]e^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2 t} + \left(\frac{l}{n\pi b}\right)^2 C_n\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi) - \frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]}{n\pi(\alpha^2 l^2 + n^2\pi^2)}\right\}\cdot$$

$$e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]}{n\pi(\alpha^2 l^2 + n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

解法 3　利用线性叠加原理,把定解问题(Ⅰ)的解表示成

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

其中 $v(x,t)$ **和** $w(x,t)$ **分别是定解问题**

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} v_t - b^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) = T \end{cases}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases} w_t - b^2 w_{xx} = Ab^2 e^{-\alpha x} \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = 0 \end{cases}$$

的解,其中定解问题(Ⅱ)的解是熟知的,为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2T}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

求解定解问题(Ⅲ),我们采用齐次化原理,为此我们先求解

$$\begin{cases} h_t-b^2h_{xx}=0\\ h|_{x=0}=h|_{x=l}=0\\ h|_{t=\tau}=Ab^2e^{-\alpha x}\end{cases}$$

该定解问题的解为

$$h(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$A_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l Ab^2e^{-\alpha x}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$\frac{2Ab^2n\pi}{\alpha^2l^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]$$

故定解问题(Ⅲ)的解为

$$w(x,t)=\int_0^t h(x,t;\tau)\,d\tau=$$

$$\int_0^t\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab^2n\pi}{\alpha^2l^2+n^2\pi^2}[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]e^{-\left(\frac{n\pi b}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}d\tau=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]}{n\pi(\alpha^2l^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x\left[1-e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}\right]$$

所以

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2T}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]}{n\pi(\alpha^2l^2+n^2\pi^2)}\right\}e^{-\left(\frac{n\pi}{al}\right)^2 t}$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2[1-(-1)^n e^{-\alpha l}]}{n\pi(\alpha^2 l^2+n^2\pi^2)}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

9. **求下列定解问题**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

解 求解该定解问题,采用上题中的解法1,令 $u(x,t)=w(x,t)+v(x)$,代入泛定方程,并使得 $w(x,t)$ 的方程是齐次的,于是有

$$w_t-a^2w_{xx}=a^2v_{xx}+A=0$$

因此
$$v_{xx}=-\frac{A}{a^2}$$

令
$$v(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+Bx+C$$

依边界条件知

$$w(0,t)=u(0,t)-v(0,t)=-C$$

$$w(l,t)=u(l,t)-v(l,t)=\frac{Al}{2a^2}-Bl-C$$

为使 $w(x,t)$ 的边界条件为边齐次的,只需

$$C=0,B=\frac{Al}{2a^2}$$

所以
$$v(x)=-\frac{A}{2a^2}(x^2-lx)$$

故关于 $w(x,t)$ 的定解问题为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=\dfrac{A}{2a^2}x^2-\dfrac{Al}{2a^2}x=\phi(x)\end{cases}$$

定解问题(Ⅰ)的级数形式的解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l \frac{A}{2a^2}(x^2 - lx)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{l}\int_0^l \frac{A}{a^2}x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x - \frac{A}{a^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}[(-1)^n - 1]$$

所以

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) = -\frac{A}{2a^2}(x^2 - lx) +$$

$$\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

10. 求满足下列定解条件的一维热传导方程的解。

$u(0,t) = 0, u(l,t) = 5$

$u(x,0) = kx$

解　所求解的定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 10, u(l,t) = 5 \\ u(x,0) = kx \end{cases}$$

其边界条件是非齐次的,且均为常数,为将边界条件齐次化,令

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

把它代入原定解问题得

$$(\mathrm{I})\begin{cases} w_t - a^2w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = 10 - v(0) \\ w(l,t) = 5 - v(l) \\ w(x,0) = kx - v(x) \end{cases}$$

为使边界条件也为齐次的, $v(x)$ 须满足

$$v(0) = 10, v(l) = 5$$

这时只要取

$$v(x)=10+\frac{x}{l}[5-10]=10-\frac{5x}{l}$$

于是定解问题(Ⅰ)可化为

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0\\ w(0,t)=w(l,t)=0\\ w(x,0)=\left(k+\frac{5}{l}x\right)-10=\varphi(x)\end{cases}$$

而定解问题(Ⅱ)的级数形式的解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2}{l}\int_0^l\left[\left(k+\frac{5}{l}x\right)-10\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2(kl+5)}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x-\frac{20}{l}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\\&\frac{2}{n\pi}[(-1)^n(5-kl)-10]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=v(x)+w(x,t)=\\&10-\frac{5x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5-kl)-10}{n}\mathrm{e}^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}$$

11. 试确定下列定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x)\\ u|_{x=0}=A,u|_{x=l}=B\\ u|_{t=0}=g(x)\end{cases}$$

的解。

解 由题 10,令 $v(x) = A + \frac{x}{l}(B - A)$

$$u(x, t) = A + \frac{x}{l}(B - A) + w(x, t)$$

则新的未知函数 $w(x, t)$ 满足下列定解问题

$$(\text{I})\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x) \quad (0 < x < l, t > 0) \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) = g(x) - A + \frac{x}{l}(A - B) \end{cases} \tag{1}$$

由于自由项仅为 x 的函数,依题 8 中解法 1,找一个只关于 x 的函数 $P(x)$ 使得

$$w(x, t) = h(x, t) + P(x) \tag{2}$$

将(2) 式代入泛定方程(1),并使 $h(x, t)$ 的方程是齐次的,于是有

$$h_t - a^2 h_{xx} = a^2 P_{xx} + f(x) = 0$$

因此

$$P_{xx}(x) = -\frac{f(x)}{a^2}$$

故由初始条件知关于 $h(x, t)$ 的定解问题为

$$(\text{II})\begin{cases} h_t - a^2 h_{xx} = 0 \\ h(0, t) = -P(0), h(l, t) = -P(l) \\ h(x, 0) = g(x) - A + \frac{x}{l}(A - B) - P(x) \end{cases}$$

将定解问题(II) 的边界条件齐次化得

$$P(0) = 0, P(l) = 0$$

令 $F(\tau)$ 为 $-\frac{f(\tau)}{a^2}$ 的二次积分形式,故 $P(x)$ 可表示成

$$P(x) = F(x) + \frac{F(0) - F(l)}{l}x - F(0)$$

于是定解问题(II) 化为

$$\begin{cases} h_t - a^2 h_{xx} = 0 \\ h(0,t) = h(l,t) = 0 \\ h(x,0) = g(x) - A + \dfrac{x}{l}(A - B) - F(x) + F(0) - \\ \qquad\qquad \dfrac{F(0) - F(l)}{l}x = \varphi(x) \end{cases}$$

此定解问题级数形式的解为

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

所以原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A + \frac{x}{l}(B - A) + w(x,t) = \\ & A + \frac{x}{l}(B - A) + P(x) + h(x,t) = \\ & A + \frac{x}{l}(B - A) + F(x) + \frac{F(0) - F(l)}{l}x - F(0) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\tau d\tau\right]e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(\tau) = g(\tau) - A + \frac{\tau}{l}(A - B) - F(\tau) + F(0) - \frac{F(0) - F(l)}{l}\tau$$

$F(\tau)$ **为** $-\dfrac{f(\tau)}{a^2}$ **的二次积分形式。**

12. **求稳恒状态下,由直线** $x = 0, x = l, 0, y = b$ **所围矩形板内各点的温度,假设** $x = 0, x = l$ **及** $y = 0$ **三边上温度保持为零度,** $y = b$ **这边上各点温度为** $\varphi(x)$**,其中** $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

解　设该矩形板的温度分布为 $u(x,y)$**,则** $u(x,y)$ **是如下定解问题的解:**

$$
(\text{I})\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & (0 < x < l_1, 0 < y < l_2) \\ u(0, y) = 0, u(l, y) = 0 & (0 \leq y \leq l_2) \\ u(x, 0) = 0, u(x, l_2) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l_1)\end{cases}
$$

由分离变量法,令 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ **代入泛定方程及齐次边界条件,分离变量后得**

$$
Y'' - \lambda Y = 0 \tag{1}
$$

$$
\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (2) \\ X(0) = 0, X(l_1) = 0 & (3) \end{cases}
$$

式(2),(3) **构成的固有值问题,对应的固有值为**

$$
\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l_1^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)
$$

固有函数为

$$
X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l_1}x
$$

求解方程(1) **得**

$$
Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi}{l_1}y + B_n \sinh\frac{n\pi}{l_1}y
$$

所以定解问题(Ⅰ) **的解可表示为**

$$
u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cosh\frac{n\pi}{l_1}y + B_n \sinh\frac{n\pi}{l_1}y\right)\sin\frac{n\pi}{l_1}x
$$

依初始条件知

$$
\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l_1}x = 0 \\ u(x, l_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\frac{n\pi l_2}{l_1}\sin\frac{n\pi}{l_1}x = \varphi(x) \end{cases}
$$

因此

$$
A_n = 0
$$

$$
B_n = \frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\frac{\varphi(x)}{\sinh\frac{n\pi l_2}{l_1}}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\mathrm{d}x =
$$

$$\frac{2}{l_1 \sinh \frac{n\pi l_2}{l_1}} \int_0^{l_1} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l_1} x \mathrm{d} x$$

所以

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l_1 \sinh \frac{n\pi l_2}{l_1}} \int_0^{l_1} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l_1} x \mathrm{d} x \right] \sin \frac{n\pi}{l_1} x \sinh \frac{n\pi}{l_1} y$$

13. 一半径为 a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持 $u(a,\theta) = T\theta(\pi - \theta)$，而直径边界上温度保持为零度，板的侧面绝缘，试求稳恒状态下的温度分布规律 $u(\rho,\theta)$。

解　依题意，$u(\rho,\theta)$ 应满足下列定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & (0 < \theta < \pi, 0 \leq \rho < a) \\ u(a,\theta) = T\theta(\pi - \theta) & (0 < \theta < \pi) \\ u(\rho,0) = 0, u(\rho,\pi) = 0 & (0 \leq \rho \leq a) \\ |u(0,\theta)| < +\infty & (0 \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

由分离变量法，令 $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Phi(\theta)$，代入泛定方程以及边界条件，分离变量后得

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 & (0 < \theta < \pi) & (1) \\ \Phi(0) = 0, \Phi(\pi) = 0 & & (2) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 & (0 < \rho < a) \\ |R(0)| < +\infty \end{cases} \quad (3)$$

由式(1)，(2) 构成的固有值问题是熟知的，其固有值为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

固有函数为　$\Phi_n(\theta) = \sin\theta$

求解方程(3)，此方程为欧拉方程，只要令 $t = \ln\rho$ 或 $\rho = \mathrm{e}^t$，则式(3) 可化为关于自变量 t 的常系数方程，解之得

$$R_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

为了保证 $|R(0)| < +\infty$，只有 $b_n = 0$，即 $R_n(\rho) = a_n \rho^n$，

所以原定解问题级数形式的解为

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\rho^n\sin n\theta$$

由初始条件知

$$u(a,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n a^n\sin n\theta=T\theta(\pi-\theta)$$

因此

$$C_n=\frac{2}{\pi a^n}\int_0^{\pi}T\theta(\pi-\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{2T}{a^n}\int_0^{\pi}\theta\sin n\theta\mathrm{d}\theta-\frac{T}{\pi a^n}\int_0^{\pi}\theta^2\sin n\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$-\frac{2T}{na^n}\int_0^{\pi}\theta\mathrm{d}\cos n\theta+\frac{T}{an\pi^n}\int_0^{\pi}\theta^2\mathrm{d}\cos n\theta=$$

$$-\frac{2T}{na^n}\left[\theta\cos n\theta\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos n\theta\mathrm{d}\theta\right]+\frac{2T}{an\pi^n}\left[\theta^2\cos n\theta\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.2\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{4T}{\pi n^3a^n}[1-(-1)^n]$$

所以

$$u(\rho,\theta)=\frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n^3a^n}[1-(-1)^n]\sin n\theta$$

14. 一圆环形平板,内半径为 r_1,外半径为 r_2,侧面绝缘,如内圆温度保持零度,外圆温度保持 1 度,试求稳恒状态下的温度分布规律 $u(r,\theta)$。

解　设温度分布为 $u(r,\theta)$,其应满足如下定解问题:

$$\begin{cases}\nabla^2u=0 & (r_1<r<r_2,0\leq\theta\leq2\pi)\\ u(r_1,\theta)=f_1(\theta)=0,u(r_2,\theta)=f_2(\theta)=1\\ u(r,\theta+2\pi)=u(r,\theta)\end{cases}\tag{1}$$

由分离变量法,令 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$,代入泛定方程(1)式以及边界条件和周期性条件,分离变量后得

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 & (2)\\ \Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta) & (3)\end{cases}$$

及
$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 & (4) \\ R(r_1) = 0 & (5) \end{cases}$$

(2),(3) 式构成的固有值问题的固有值为 $\lambda = n^2 \quad (\lambda = 0,1,2,\cdots)$
固有函数为

$$\Phi_n(\theta) = \begin{cases} a_0 \quad (\text{常值}) & (n = 0) \\ a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

解方程(4) 得

$$R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r & (n = 0) \\ c_n r^n + d_n r^{-n} & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

所以原定解问题级数形式的解为

$$u(r,\theta) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(c_n r^n + d_n r^{-1})$$

或写成

$$u(r,\theta) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta]$$

其中 $c_0, d_0, A_n, B_n, C_n, D_n$ 均为常数。
由边值条件知

$$c_0 + d_0 \ln r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r_1^n + B_n r_1^{-n}) \cos n\theta + (C_n r_1^n + D_n r_1^n) \sin n\theta] = f_1(\theta)$$

$$c_0 + d_0 \ln r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r_2^n + B_n r_2^{-n}) \cos n\theta + (C_n r_2^n + D_n r_2^{-n}) \sin n\theta] = f_2(\theta)$$

将 $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ 分别按余弦函数族 $\{\cos n\theta\}$ 以及正弦函数族 $\{\sin n\theta\}$ 在 $[0,2\pi]$ 展开成傅里叶级数,得

$$\begin{cases} c_0 + d_0 \ln r_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \\ c_0 + d_0 \ln r_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1 \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} A_n r_1^n + B_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta = 0 \\ A_n r_2^n + B_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n r_1^n + D_n r_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta = 0 \\ C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta = 0 \end{cases}$$

因此解得

$$c_0 = -\frac{\ln r_1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},\ d_0 = \frac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}},\ A_n = B_n = C_n = D_n = 0$$

于是板的稳恒温度分布为

$$u(r,\theta) = -\frac{\ln r_1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}\ln r = \frac{1}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}\ln \frac{r}{r_1}$$

15. 如何解下列定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \\ u|_{x=0} = M,\ u|_{x=\rho} = M_2 \\ u|_{x=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解　令 $u(x,t)$ 为所求定解问题的解。利用叠加原理,考虑到泛定方程的自由项只是 x 的函数,令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$,这样可将定解问题分解为如下两个定解问题

$$(\text{I})\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - w(x),\ v_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases} a^2 w_{xx} + f(x) = 0 \\ w(0) = M_1,\ w(l) = M_2 \end{cases}$$

(Ⅰ)的解是熟知的,为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l[\varphi(x)-w(x)]\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\B_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\end{cases}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x+w(x)$$

其中 $w(x)$ 由二阶常微分方程

$$\begin{cases}a^2w_{xx}+f(x)=0\\w(0)=M_1,w(l)=M_2\end{cases}$$

所确定。

16. 在矩形域内求下列定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=f(x,y)\\u|_{x=0}=\varphi_1(y),u|_{x=a}=\varphi_2(y)\\u|_{y=0}=\psi_1(x),u|_{y=b}=\psi_2(x)\end{cases}$$

的解。

解 求解定解问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\nabla^2u=f(x,y)\quad(0<x<a,0<y<b)\\u(0,y)=\varphi_1(y),u(a,y)=\varphi_2(y)\\u(x,0)=\psi_1(x),u(x,b)=\psi_2(x)\end{cases}\tag{1}$$

必须将其中一组边界条件齐次化,这里我们将关于 x 的边界条件齐次化,为此令 $u(x,y)=w(x,y)+v(x,y)$,齐次化 w 关于 x 的边界条件只须取

$$v(0,y)=\varphi_1(y),v(a,y)=\varphi_2(y)$$

不妨设

$$v(x,y)=\varphi_1(y)+\frac{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)}{a}x$$

则

$$\nabla^2 v = \varphi_1''(y) + \frac{\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)}{a}x$$

故求解定解问题(I) 就转化为求解下面的定解问题:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \nabla^2 w = f(x,y) - [\varphi_1''(y) + \dfrac{\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)}{a}x] & (2) \\ w(0,y) = w(a,y) = 0 & \\ w(x,0) = \psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \dfrac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x] & (3) \\ w(x,b) = \psi_2(x) - [\varphi_1(b) + \dfrac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x] & (4) \end{cases}$$

用固有函数展开法来求解(II), (II) 对应的齐次方程定解问题的固有函数集为$\{\sin\frac{n\pi}{a}x\}(n = 1,2,3,\cdots)$。

故令

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (5)$$

将式(5) 代入式(2) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}f_n(y)]\sin\frac{n\pi}{a}x = f(x,y) - [\varphi_1''(y) + \frac{\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)}{a}x]$$

由初始条件知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)\sin\frac{n\pi}{a}x = \psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)\sin\frac{n\pi}{a}x = \psi_2(x) - [\varphi_1(b) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x]$$

故

$$f_n(0) = \frac{2}{a}\int_0^a\left\{\psi_1(x) - [\varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{a}x]\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x$$

$$f_n(b) = \frac{2}{a}\int_0^a\left\{\psi_2(x) - [\varphi_1(b) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(b)}{a}x]\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x$$

所以

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x+\varphi_1(y)+\frac{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)}{a}x$$

其中 $f_n(y)$ 由常微分方程

$$\begin{cases} f_n''(y)-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}f_n(y)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big\{f(x,y)-\Big[\varphi_1''(y)+ \\ \qquad\qquad \dfrac{\varphi_2''(y)-\varphi_1''(y)}{a}\Big]\Big\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x \\ f_n(0)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big\{\psi_1(x)-\Big[\varphi_1(0)+\dfrac{\varphi_2(0)-\varphi_1(0)}{a}x\Big]\Big\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x \\ f_n(b)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big\{\psi_2(x)-\Big[\varphi_1(b)+\dfrac{\varphi_2(b)-\varphi_1(b)}{a}x\Big]\Big\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

确定。

17. 在扇形区域内求下列定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \quad (0<\rho<R,0<\theta<\alpha) & (1) \\ u(\rho,0)=u(\rho,\alpha)=0 \quad (0<\rho<R) & (2) \\ u(a,\theta)=f(\theta) & (3) \end{cases}$$

解 该定解问题的泛定方程和边界条件均为齐次的,用分离变量法求解,令

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta) \tag{4}$$

将其代入泛定方程(1),分离变量后得

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{-R(\rho)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda$$

即

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \tag{5}$$

$$\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \tag{6}$$

将式(4)代入式(2)得

$$\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0 \tag{7}$$

注意到定解问题的物理意义,在 $\rho=0$ 处,应满足有界性条件,即

$$|u(0,\theta)| < +\infty$$

故

$$|R(0)| < +\infty \tag{8}$$

解式(6),(7)构成的固有值问题,其固有值为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

固有函数为　$\Phi_n(\theta) = \sin\frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (n = 1,2,\cdots)$

将 λ 代入式(5),式(5)是一个二阶齐次欧拉方程,在式(5)中令 $\rho = e^t$,变换自变量为 t 得

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} - \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}R_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

其通解为

$$R_n(t) = C_n e^{\frac{n\pi t}{\alpha}} + D_n e^{-\frac{n\pi t}{\alpha}} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

故

$$R_n(\rho) = C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} + D_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

由条件式(8)知 D_n 必为零,因此 $R_n(\rho) = C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$。

于是该定解问题级数形式的解为

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \tag{9}$$

又由式(3)知

$$u(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta = f(\theta)$$

将 $f(\theta)$ 在 $[0,\alpha]$ 上按正弦函数族 $\left\{\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\}$ 展开成 Fourier 级数,得

$$C_n = \frac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha} f(\theta)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta d\theta \quad (n = 1,2,\cdots)$$

代入式(9)即得原定解问题的解。

18. 在矩形域 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ 内求拉普拉斯方程的解,使满足边界条件:

$$\begin{cases} u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=a}=ay \\ \dfrac{u}{y}\Big|_{y=0}=0,\ \dfrac{u}{y}\Big|_{y=b}=0 \end{cases}$$

解　上述问题写成定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u=0 & (0<x<a, 0<y<b) \\ u(0,y)=0, u(a,y)=Ay \\ u_y(x,0)=0, u_y(x,b)=0 \end{cases}$$

该定解问题关于 y 的边界条件为齐次的, 由分离变量法, 令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$, 将其代入泛定方程与所有的齐次边界条件, 分离变量后得

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 & (1) \\ X(0)=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y''+\lambda=0 & (3) \\ Y'(0)=0, Y'(b)=0 & (4) \end{cases}$$

解　式(3),(4) 构成的固有值问题, 其固有值为

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{b^2}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$Y_n(y)=\cos\frac{n\pi y}{b}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

将 λ_n 代入式(1) 中解得

$$X_n(x)=\begin{cases} A_0+B_0x & (n=0) \\ A_n\cosh\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\sinh\dfrac{n\pi}{b}x & (n\neq 0) \end{cases}$$

由 $X_n(0)=0$, 知 $A_0=0, A_n=0$, 所以

$$X_n(x)=\begin{cases} B_0x & (n=0) \\ B_n\sinh\dfrac{n\pi}{b}x & (n\neq 0) \end{cases}$$

故原定解问题级数形式的解为

$$u(x,y)=B_0x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

又由非齐次边界条件知

$$u(a,y)=B_0a+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{b}a\cos\frac{n\pi}{b}y=Ay$$

将 Ay 在 $[0,b]$ 上展开成余弦 Fourier 级数,得

$$B_0=\frac{1}{ab}\int_0^b Ay\mathrm{d}y=\frac{Ab}{2a}$$

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^b\frac{Ay}{\sinh\frac{an\pi}{b}}\cos\frac{n\pi}{b}y\mathrm{d}y=\frac{2Ab}{n^2\pi^2\sinh\frac{an\pi}{b}}(\cos n\pi-1)$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,y)=\frac{Ab}{2a}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2\sinh\frac{an\pi}{b}}\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

19. 把高频输电线充电到具有电压 E,然后一端短路封闭,另一端保持断开,求以后的电压分布。

解　由教材 §1.1 中导出的高频传输线方程知,电压 u 应满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

考虑边值条件,设在 $x=0$ 处短路,故 $x=0$ 处的电位为零,即 $u(0,t)=0$。另端 $x=l$ 处断开,故这端通过的电流为零,由教材 §1.1 中(1.4) 式知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-L\frac{\partial i}{\partial t}(\text{电导与电阻产生的效应忽略不计})$$

因此

$$u_x(l,t)=0$$

对于初始条件,显然有 $u(x,0)=E$,另外由于初始时刻传输线上电流应为 0,故由教材 §1.1 中(1.5) 式知

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-c\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

也即

$$u_t(x,0)=0$$

所以电压 $u(x,t)$ 应为

$$(\text{I})\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(0,t)=0,u_x(l,t)=0\\ u(x,0)=E,u_t(x,0)=-0\end{cases}$$

的解,下面由分离变量法来求解(Ⅰ)。令 $u(x,t)=X(x)T(t)$,代入(Ⅰ)的泛定方程及齐次边界条件,分离变量后得

$$T''+\lambda^2a^2T=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0 & (2)\\ X(0)=0,X''(l)=0 & (3)\end{cases}$$

解式(2),(3)构成的固有值问题,其固有值为

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

将 λ_n 代入式(1)中解得

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t$$

所以定解问题(Ⅰ)的解的结构为

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

由初始条件知

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=E\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=0\end{cases}$$

故

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l E\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}\mathrm{d}x = \frac{4E}{(2n+1)\pi}$$

$$B_n = 0$$

所以电压分布

$$u(x,t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

20. 求解矩形膜振动的位移,即解下列定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ u|_{t=0} = xy(x-a)(y-b), \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解　该定解问题是一个二维波动方程的初边值问题,其中泛定方程与边界条件均为齐次的,同样也可采用分离变量法来求解。与一维情形不同的是,需要经过两次分离变量。

先令 $u(x,y) = T(t)V(x,y)$ 将其代入泛定方程以及所有的齐次边界条件得

$$\frac{T''}{T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{v} = -\lambda^2$$

即

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 T = 0 & (1) \\ V_{xx} + V_{yy} + \lambda^2 V = 0 & (2) \end{cases}$$

以及

$$V(x,0) = 0, V(x,b) = 0 \tag{3}$$

$$V(0,y) = 0, V(a,y) = 0 \tag{4}$$

再令 $V(x,y) = X(x)Y(y)$,分别代入(2),(3),(4) 式中分离变量得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + \lambda^2 Y}{Y} = -\mu^2$$

且　$X(0) = X(a) = 0, Y(0) = Y(b) = 0$

这样就得了两个固有值问题

$$(\text{I})\begin{cases} X''+\mu^2=0 \\ X(0)=0,\ X(a)=0 \end{cases} \quad 和(\text{II})\begin{cases} Y''+(\lambda^2-\mu^2)=0 \\ Y(0)=Y(b)=0 \end{cases}$$

而(Ⅰ)和(Ⅱ)对应的固有问题的解分别为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \left(\mu^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}, n=1,2,\cdots\right)$$

$$Y_m(y)=\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad \left(\lambda^2-\mu^2=\frac{m^2\pi^2}{b^2}, m=1,2,\cdots\right)$$

故由(2),(3),(4)式构成的固有值问题对应的固有值为

$$\lambda_{m,n}^2=\left[\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right]\pi^2 \qquad (m,n=1,2,\cdots)$$

固有函数为

$$V_{m,n}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

解关于 T 的方程(1)得

$$T_{m,n}(t)=A_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t+B_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t$$

故原定解问题解的形式为

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t+ B_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

由初始条件知

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}=xy(x-a)(y-b) \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{m,n}B_{m,n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi}{b}y=0 \quad B_{m,n}=0 \end{cases}$$

利用固有函数系的正交性,得

$$A_{m,n}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b xy(x-a)(y-b)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y= \frac{16a^2b^2}{n^3m^3\pi^6}(1-\cos n\pi)(1-\cos m\pi)$$

所以

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\cos\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2n^2}}{ab}\pi t$$

其中 $$A_{m,n}=\frac{16a^2b^2}{n^3m^3\pi^6}(1-\cos m\pi)(1-\cos m\pi)$$

21. 证明教材 §2.2 中所得的固有函数系 $\{\sin\beta_n x\}(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,l]$ 上是正交系,即

$$\int_0^l \sin\beta_m x\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x=0\qquad(m\neq n)$$

其中 β_n 满足 $\beta_n\sin\beta_n l+h\cos\beta_n l=0$, h 为常数。

证　设 X_m 和 X_n 分别是对应于固有值 $\lambda=\beta_m^2$ 和 $\lambda=\beta_n^2$ 的固有函数,也即 $X_m(x)=\sin\beta_m x$, $X_n(x)=\sin\beta_n x$,于是有

$$X''_m+\beta_m^2X_m=0\tag{1}$$

$$X''_n+\beta_n^2X_n=0\tag{2}$$

用 X_n 和 X_m 分别乘以(1)式和(2)式然后将所得两式相减,继而在 $[0,l]$ 上积分得

$$(\beta_m^2-\beta_n^2)\int_0^l X_nX_m\,\mathrm{d}x=\int_0^l(X_mX''_n-X_nX''_m)\,\mathrm{d}x=$$

$$X_mX'_n-X_nX'_m\Big|_0^l=$$

$$X_m(l)X'_n(l)-X_n(l)X'_m(l)=$$

$$X_m(l)(-hX_n(l))-X_n(l)(-hX_m(l))=0\tag{3}$$

(3)式中用到教材 §2.2 中的(2.17)式。

因 $m\neq n$,故 $\beta_m^2\neq\beta_n^2$,从而得正交性

$$\int_0^l X_mX_n\,\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\beta_m x\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x=0\qquad(m\neq n)$$

第三章　行波法与积分变换法

3.1　内容要点

(1)行波法的适用范围:只适用于波动方程的初值问题。

(2)用行波法求解一维齐次波动方程柯西问题:

$$(\text{I})\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

求解(Ⅰ)的解题步骤:

① 引入新变量$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$,将泛定方程化为标准型:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

② 求出通解为

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

③ 利用初始条件确定通解中的待定函数,得(Ⅰ)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

称为无限长弦自由振动的达朗贝尔公式。

(3)达朗贝尔公式的物理意义:弦上的任意扰动总是以行波形式分别向两个方向传播出去,传播速度正好是弦振动方程中的常数 a。

(4)用齐次化原理求解一维非齐次波动方程柯西问题:

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}
$$

求解(II)的步骤:

① 将定解问题(II)拆为下面两问题。

$$
\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III})\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}
$$

② 对定解问题(III)给出齐次化原理: 定理(齐次化原理) 若 $w(x,t;\tau)$ 是初值问题

$$
(\mathrm{IV})\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > \tau) \\ w|_{t=\tau} = 0 \\ w_t|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}
$$

的解(其中 τ 为参数),则定解问题(III)的解为

$$
u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau
$$

作变换 $t' = t - \tau$,则定解问题(IV)的解为

$$
w(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi
$$

进而得定解问题(III)的解为

$$
u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau
$$

③ 利用叠加原理得定解问题(II)的解为

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi
$$

(5) 三维齐次波动方程柯西问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

其解为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M} \varphi \mathrm{d}s\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M} \psi \mathrm{d}s$$

其中 S_{at}^m 表示以 $M(x, y, z)$ 为心, at 为半径的球面, 上式称为三维齐次波动方程柯西问题的泊松公式。

(6) 三维齐次波动方程柯西问题的泊松公式的物理意义:

① 空间任一点 M 在任意时刻 $t > 0$ 的状态完全由以该点为心, at 为半径的球面上初始状态决定。

② 当初始扰动限制在空间某局部范围内时, 扰动有清晰的"前锋"与"阵尾", 即惠更斯原理成立。

(7) 二维齐次波动方程柯西问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & (-\infty < x, y < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$$

其解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \iint_{C_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\right]$$

其中 C_{at}^M 表示的是以 $M(x, y)$ 为心, at 为半径的圆盘域。

上式称为二维齐次波动方程柯西问题的泊松公式。

(8) 二维齐次波动方程柯西问题的泊松公式的物理意义:

① 二维空间任一点 M 在任意时刻 $t > 0$ 的状态由以该点为心, at 为半径的圆盘域上初始状态所决定。

② 局部初始扰动对二维空间任一点的扰动有持续后效,波的传播有清晰的前锋而无后锋,此现象称为波的扩散,即惠更斯原理不再成立。

(9) 傅里叶变换:

① 傅里叶积分定理:若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足:

(ⅰ) 在任一有限区间上满足狄里克雷条件,

(ⅱ) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}t$ 收敛,

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iwx}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{iwx}\mathrm{d}w = \begin{cases} f(t) & (t\text{为 } f(t) \text{ 的连续点}) \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t\text{为 } f(t) \text{ 的间断点}) \end{cases}$$

② 定义:$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-iwx}\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换,记为 $F[f(t)]$,$|F(w)|$ 称为 $f(t)$ 的频谱。

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\mathrm{e}^{iwx}\mathrm{d}w$ 称为 $F(w)$ 的傅里叶逆变换,记为 $f(x) = F^{-1}[F(w)]$。

③ 基本性质:

(Ⅰ) 线性性质:$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2]$　(α, β为常数)

(Ⅱ) 微分性质:$F[f'(x)] = \mathrm{i}wF[f]$

(Ⅲ) 积分性质:$F[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi] = \frac{1}{\mathrm{i}w}F[f(x)]$

(Ⅳ) 位移性质:$F[f(x \pm x_0)] = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}wx_0}F[f(x)]$　(x_0 为实常数)

(Ⅴ) 相似性质(伸缩性质):设 $F(w) = F[f(x)]$,则:

$$F[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right) \qquad (a\text{为实常数}, a \neq 0)$$

(Ⅵ) 乘多项式性质(象函数的微分性质):

$$F[xf(x)] = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}F[f(x)]$$

(Ⅶ) **类似于对称性的性质**:**设** $F(w) = F[f(x)]$,**则**:

$$2\pi F^{-1}[f(w)] = F(-x)$$

④ **卷积**:**设** $f_1(x)$, $f_2(x)$ **在** $(-\infty, +\infty)$ **上有定义**,**则称积分** $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi$ **为** $f_1(x)$ **与** $f_2(x)$ **的卷积**,**记为** $f_1 * f_2$,**其具有如下性质**:

(Ⅰ) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

(Ⅱ) $f * [f_1 + f_2] = f * f_1 + f * f_2$

(Ⅲ) $f * [g * h] = [f * g] * h$

(Ⅳ) (**卷积定理**) $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$

(Ⅴ) $F[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi}F[f_1] * F[f_2]$

⑤ **δ— 函数**:**是一广义函数**,**对任意连续函数** $\phi(x)$ **有**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-c)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(c)$$

又有

$$F[\delta(x-x_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx_0}$$

$$F^{-1}[\delta(w-w_0)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_0 x}$$

(10) **拉普拉斯变换**:

① **定义**:**设函数** $f(t)$ **在** $t \geq 0$ **时有定义**,**且积分** $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ (s **是一复参量**) **在** s **的某一域内收敛**,**则称**

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

为函数 $f(t)$ **的拉普拉斯变换记作**

$$F(s) = L[f(t)]$$

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换,则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换。

② 拉普拉斯变换存在定理:若 $f(t)$ 满足:

① 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上分段连续;

② $t \to +\infty$ 时,存在 $M > 0, c \geq 0$,使得 $|f(t)| \leq Me^{ct} \quad (0 \leq t < +\infty)$

则 $L[f(t)]$ 在 $\mathrm{Re}(s) > C$ 上存在,且为解析函数。

③ 基本性质:

(Ⅰ) 线性性质:

$$L[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha L[f_1] + \beta L[f_2] \quad (\text{其中 } \alpha, \beta \text{为常数})$$

(Ⅱ) 微分性质:$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) \qquad (\mathrm{Re}(s) > c)$

(Ⅲ) 积分性质:$L[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t] = \frac{1}{s}L[f(t)] \qquad (\mathrm{Re}(s) > c)$

(Ⅳ) 位移性质:设 $F(s) = L[f(t)]$,则:$L[e^{at}f(t)] = F(s - a) \quad (\mathrm{Re}(s - a) > c)$

(Ⅴ) 延迟性质:$L[f(t - a)] = e^{-as}L[f(t)] \qquad (a > 0)$

(Ⅵ) 相似性质(伸缩性质):设 $F(s) = L[f(t)]$,则

$$L[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right) \qquad (c > 0)$$

(Ⅶ) 象函数的微分性质:$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L[f(t)] = -L[tf(t)]$

(Ⅷ) 象函数的积分性质:设 $F(s) = L[f(t)]$,则

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\tau)\mathrm{d}\tau$$

④ 卷积:设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 当 $t \geq 0$ 时都连续,则由积分 $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\mathrm{d}\tau$ 所定出的函数 $h(t)$ 称为 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积,记为 $f * g$。有如下性质

(Ⅰ) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

(Ⅱ) $f * [f_1 + f_2] = f * f_1 + f * f_2$

(Ⅲ) $f * [g * h] = [f * g] * h$

(Ⅳ) (卷积定理) $L[f_1 * f_2] = L[f_1] \cdot L[f_2]$

(Ⅴ) 反演公式: 设 $L[f(t)] = F(s), \mathrm{Re}(s) = \beta$, 则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (t > 0, \beta > c)$$

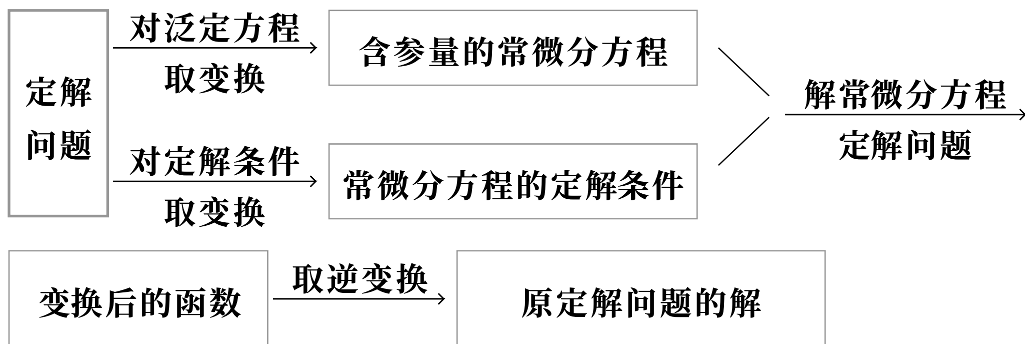
称为拉普拉斯变换反演公式,右端积分称为拉普拉斯变换反演积分。

定理 若 $F(s) = L[f(t)]$ 在有限复平面内只有有限个奇点 s_1, s_2, …, s_n, 且 $\lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$

(11) 用积分变换法解定解问题的主要步骤:

选择适当的变换后按如下步骤进行:



3.2 基本要求

(1) 掌握达朗贝尔公式的推导;

(2) 会用降维法求解二维齐次波动方程柯西问题;

(3) 会用齐次化原理求解非齐次波动方程柯西问题;

(4) 掌握傅里叶变换和拉普拉斯变换的基本性质,会选择适当的变换求解定解问题。

3.3　例题分析

1. 行波法求解定解问题

解题思路:首先找出泛定方程通解,利用初始条件确定特解。

例 3-1　求解

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0 \\ u|_{y=0}=3x^2,\ u_y|_{y=0}=0 \end{cases}$$

解　泛定方程对应的特征方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3=0$$

特征曲线为　$x+y=c, 3x-y=c_2$

令 $\xi=x+y, \eta=3x-y$,原方程化为

$$u_{\xi\eta}=0$$

其通解为　$u=f_1(\xi)+f_2(\eta)$

其中 f_1, f_2 是两个任意二次连续可微的函数,即原方程通解为

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(3x-y)$$

由初始条件得

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(3x)=3x^2 & (3.1) \\ f'_1(x)-f'_2(3x)=0 & (3.2) \end{cases}$$

将式(3.2)积分得

$$f_1(x)-\frac{1}{3}f_2(3x)=c$$

和式(3.1)联立得

$$f_1(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}c\quad f_2(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}c$$

所以原问题的解为

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(3x-y)=3x^2+y^2$$

例 3-2　证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad (h>0,\text{常数})$$

的通解可以写成:

$$u=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}\tag{3.3}$$

其中 F,G **为任意的具有二阶连续偏导数的单变量函数,并由此求解它的初值问题**

$$t=0\text{ 时 } u=\varphi(x),\ u_t=\psi(x)\tag{3.4}$$

证　**原方程可化为**

$$(h-x)u_{tt}+2a^2u_x-a^2(h-x)u_{xx}=0\tag{3.5}$$

令 $v(x,t)=(h-x)u(x,t)$,**则**

$$v_{tt}=(h-x)u_{tt}$$

$$v_x=-u+(h-x)u_x$$

$$v_{xx}=-2u_x+(h-x)u_{xx}$$

所以

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=(h-x)u_{tt}+2a^2u_x-a^2(h-x)u_{xx}$$

由式(3.5)**得**

$$v_{tt}=a^2v_{xx}$$

通解为

$$v(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$$

即原方程通解为

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}$$

方法1　**由式**(3.4)**得**

$$F(x)+G(x)=(h-x)\varphi(x)\tag{3.6}$$

$$-F'(x)+G'(x)=\frac{1}{a}(h-x)\psi(x)\tag{3.7}$$

对式(3.7)**积分后和式**(3.6)**联立得**

$$F(x)=\frac{1}{2}(h-x)\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-c$$

$$G(x) = \frac{1}{2}(h - x)\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x (h - \xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + c$$

进而得

$$u(x,t) = \frac{1}{2(h - x)}[(h - x + at)\varphi(x - at) + (h - x - at)\varphi(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}(h - \xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi]$$

方法 2　**令** $v(x,t) = (h - x)u$,**则** $v_{tt} = a^2 v_{xx}$

又　$v|_{t=0} = (h - x)\varphi(x)$　$v_t|_{t=0} = (h - x)\psi(x)$

由达朗贝尔公式可得解的表达式。

例 3－3　**求解波动方程的古沙问题**:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (-at < x < at, t > 0) & (3.8) \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) & (3.9) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) \quad (\varphi(0) = \psi(0)) & (3.10) \end{cases}$$

解　**式**(3.8) **的通解为**

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$$

由式(3.9) **得**

$$F(0) + G(2x) = \varphi(x) \tag{3.11}$$

由式(3.10) **得**

$$F(2x) + G(0) = \psi(x)$$

即

$$G(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2}) - F(0)$$

$$F(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2}) - G(0)$$

所以

$$u(x,t) = \psi(\frac{x - at}{2}) + \varphi(\frac{x + at}{2}) - F(0) - G(0)$$

又由式(3.11) **得**

$$F(0) + G(0) = \varphi(0)$$

所以　$u(x,t) = \psi(\frac{x - at}{2}) + \varphi(\frac{x + at}{2}) - \varphi(0)$

2 . 半无界问题

解题思路:根据不同的边界条件将问题适当的延拓为全无界问题。

例 2 - 4　求一端固定的半无界弦的自由振动问题的解。

解　定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

将 φ,ψ作奇延拓,令

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geq 0) \\ -\varphi(-x) & (x < 0) \end{cases},$$

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ -\psi(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

用达朗贝尔公式得解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\bar{\varphi}(x+at) + \bar{\varphi}(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi & \left(t \leq \dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi & \left(t > \dfrac{x}{a} > 0\right) \end{cases}$$

3 . 高维波动方程的定解问题

例 3 - 5　利用泊松公式求解三维齐次波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + yz \end{cases}$$

解

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M} (\xi^2 + \eta\zeta)\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [(x + at\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y +$$

$$at\sin\theta\sin\varphi)(z + at\cos\theta)](at)^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[(x^2+yz)\sin\theta+2axt\sin^2\theta\cos\varphi+$$
$$(at)^2\sin^3\theta\cos^2\varphi+azt\sin^2\theta\sin\varphi+$$
$$ayt\sin\theta\cos\theta+(at)^2\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi]\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

因

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$$

所以　$u(x,y,z,t)=(x^2+yz)t+\dfrac{a^2t^3}{3}$

例 3－6　求解平面波动方程的柯西问题:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})\\ u|_{t=0}=x^2(x+y)\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

解

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x+r\cos\theta)^2(x+y+r\cos\theta+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=$$

$$\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{2\pi x^2(x+y)r+2\pi xr^3+\pi(x+y)r^3}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\mathrm{d}r=$$

$$x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y)$$

例 3－7　求解下列柯西问题:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + c^2 u \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$$

解　令 $v(x, y, z, t) = e^{\frac{cz}{a}} u(x, y, t)$，则

$$v_{tt} = e^{\frac{cz}{a}} u_{tt},\ v_{xx} = e^{\frac{cz}{a}} u_{xx},\ v_{yy} = e^{\frac{cz}{a}} u_{yy},\ v_{zz} = \frac{c^2}{a^2} e^{\frac{cz}{a}} u$$

代入 $v_{tt} = a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz})$ 中得

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + c^2 u$$

即若 $v(x, y, z, t)$ 是定解问题

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} v_{tt} = a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) \\ v|_{t=0} = e^{\frac{cz}{a}}\varphi(x, y) \\ v_t|_{t=0} = e^{\frac{cz}{a}}\psi(x, y) \end{cases}$$

的解，则 u 是定解问题(Ⅰ)的解。

解(Ⅱ)得

$$v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M} e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}s\right] +$$

$$\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M} e^{\frac{c\zeta}{a}}\psi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}s =$$

$$e^{\frac{cz}{a}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ct\cos\theta}\varphi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\right.\right.$$

$$\left. y + at\sin\theta\sin\varphi)(at)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\right] +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ct\cos\theta}\psi(x + at\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\left. y + at\sin\theta\sin\varphi)(at)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\right\}$$

所以(Ⅰ)的解为

$$u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ct\cos\theta}\varphi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\right.$$

$$y + at\sin\theta\sin\varphi)(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\Big] +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ct\cos\theta}\psi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y +$$

$$at\sin\theta\sin\varphi)(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

例 3－8　**试用齐次化原理导出平面非齐次波动方程**

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$$

在齐次初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

下的求解公式。

解　**由齐次化原理知若** $w(x, y, t;\tau)$ **是定解问题**

$$(\text{I})\begin{cases} w_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy}) \\ w|_{t=\tau} = 0, \quad w_t|_{t=\tau} = f(x, y, \tau) \end{cases}$$

的解,则 $u(x, y, t) = \int_0^t w(x, y, z;\tau)\mathrm{d}\tau$ **是原问题的解。**

令 $T = t - \tau$, **则定解问题**(Ⅰ)**变为**:

$$\begin{cases} w_{TT} = a^2(w_{xx} + w_{yy}) \\ w|_{T=0} = 0, \quad w_T|_{T=0} = f(x, y, \tau) \end{cases}$$

由二维泊松公式得

$$w(x, y, t;\tau) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{(aT)^2 - r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r =$$

$$\frac{1}{2\pi a}\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2 - r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

所以原问题的解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{(a(t-\tau))^2 - r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau$$

4. **积分变换法应用**

例 3－9　**求函数** $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ e^{-\beta x} & (x \geq 0) \end{cases}$ **的傅里叶变换及其积**

分表达式,这里 $\beta > 0$。

解 $F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x}e^{-i\omega x}dx =$

$$\frac{1}{\beta + i\omega} = \frac{\beta - i\omega}{\beta^2 + \omega^2}$$

反之

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[f(x)]e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - i\omega}{\beta^2 + \omega^2}e^{i\omega x}d\omega =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\beta^2 + \omega^2}d\omega$$

即为 $f(x)$ 的积分表达式,并由此还可得到一个含参变量的积分值:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\beta^2 + \omega^2}d\omega = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (t = 0) \\ \pi e^{-\beta t} & (t > 0) \end{cases}$$

例 3-10 求符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$ 的傅里叶变换。

解 因为符号函数和单位阶跃函数有下列关系,即

$$\operatorname{sgn} x = 2u(x) - 1$$

利用 $u(x)$ 及傅里叶变换及线性性质,有

$F[\operatorname{sgn} x] = 2F[u(x)] - F[1] =$

$$2\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{i\omega}$$

注:利用 $\operatorname{sgn} x = u(x) - u(-x)$ 及 δ 函数是偶函数的性质也能求得结果。

例 3-11 求 $F[\sin\omega_0 x]$。

解 由傅里叶变换的线性性质有

$$F[\sin\omega_0 x] = \frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 x}e^{-i\omega x}dx\right] =$$

$$\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{-i(\omega+\omega_0)x}dx\right] =$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]=$$

$$\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

例 3－12　**求** $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ **的傅里叶变换。**

解　由傅里叶变换的定义得

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)x}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0}=$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$$

例 3－13　**求** $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2}$ **的傅里叶变换。**

解　方法 1　**令** $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，**则由分部积分及傅里叶变换的乘多项式性质得**

$$F[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2\mathrm{i}}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2\mathrm{i}}{\omega}F[xg(x)]=-\frac{2}{\omega}\frac{\mathrm{d}F[g(x)]}{\mathrm{d}\omega}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}F[g(x)]}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{\omega}{2}F[g(x)]$$

再看初始条件:

$$F[g(x)](0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}F[g(x)]}{\mathrm{d}\omega}=-\dfrac{w}{2}F[g(x)]\\ F[g(x)](0)=\sqrt{\pi}\end{cases}$$

得

$$F[g(x)]=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

利用伸缩性得

$$F[f(x)] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

方法 2　由傅里叶变换的定义

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\left(x+\frac{\mathrm{i}\omega}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x$$

考虑复变函数 $g(z) = \mathrm{e}^{-az^2}$ 沿图 3－1 所示围道的积分。

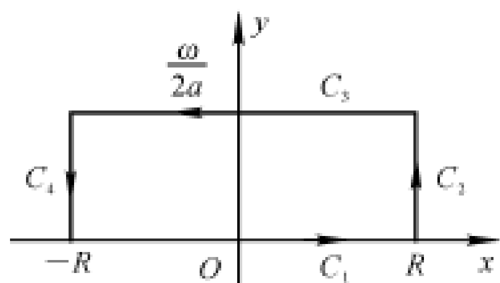


图 3－1

由柯西积分定理得

$$\int_{c_1}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{c_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{c_3}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{c_4}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = 0 \qquad (3.12)$$

因

$$\int_{c_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{\frac{w}{2a}}\mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{d}y$$

所以

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{c_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z\right| = \lim_{R\to+\infty}\left|\int_0^{\frac{w}{2a}}\mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{w}{2a}}\left|\mathrm{e}^{-a(R+\mathrm{i}y)^2}\right|\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{w}{2a}}\mathrm{e}^{-aR^2}\mathrm{e}^{ay^2}\mathrm{d}y = 0$$

即得 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{c_2}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = 0$

同理 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{c_4}\mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d} = 0$

在(3.12) 式中令 $R\to+\infty$ 得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-a\left(x+\mathrm{i}\frac{w}{2a}\right)^2}\mathrm{d}x = 0$$

亦即 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{w}{2a}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

例 3 - 14　**求** $F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ **的傅里叶逆变换。**

解　$F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega$

$x = 0$ **时,显然** $F^{-1}[F(\omega)] = 1$

$x > 0$ **时,函数** $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ **在** C_R **上连续(见图** 3 - 2**),且** $\lim\limits_{R\to+\infty} f(z) = 0$**,由约当引理知**

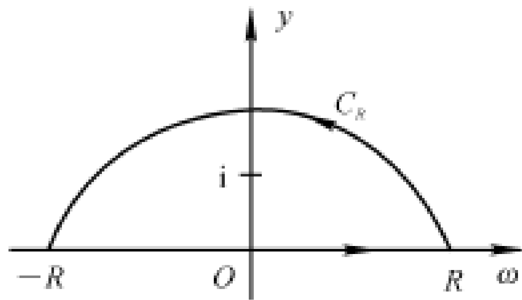


图 3 - 2

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z) e^{izx} dz = 0$$

即
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2} dz = 0$$

考虑函数　$g(z) = \frac{e^{izx}}{\pi(1+z^2)}$ **沿图** 3 - 2 **所示闭围道的积分,由留数定理得**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix\omega}}{1+\omega^2} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{C_R} \frac{e^{izx}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[g(z), i]$$

又 $z = i$ **是** $g(z)$ **的一级极点得**

$$2\pi i \operatorname{Res}[g(z), i] = 2\pi i \cdot \frac{1}{\pi} \lim_{z\to i} \frac{e^{izx}}{z+i} = e^{-x}$$

在(3 .13) **式中令** $R \to +\infty$ **得**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix\omega}}{1+\omega^2}d\omega = e^{-x}$$

$x<0$ 时,考虑函数 $g(z)=\dfrac{e^{izx}}{\pi(1+z^2)}$ 沿图 3-3 所示围道的积分

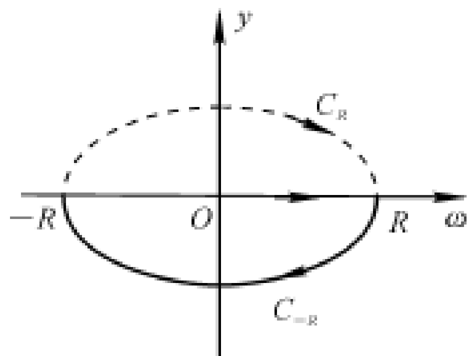


图 3-3

由留数定理得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{C_{-R}}\frac{e^{izx}}{1+z^2}dz =$$

$$-2\pi i\text{Res}[g(z),-i]=e^{x} \tag{3.14}$$

因 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{C_{-R}}\frac{e^{izx}}{1+z^2}dz \xrightarrow{z'=-z} -\frac{1}{\pi}\int_{C_R}\frac{e^{iz'(-x)}}{1+(z')^2}dz'$

由约当引理知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz'(-x)}}{1+(z')^2}dz'=0$$

在(3.14) 式中令 $R\to+\infty$ 得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2}d\omega=e^{x}$$

综上知:$F^{-1}[F(\omega)]=e^{-|x|}$

注 1:由该题可得含参量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

注 2:该题还可利用例 3-11 的结果直接得结论。

例 3-15　设 $E(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

求 $AE(\alpha x)*BE(\beta x)$，其中 A,B,α,β 均为大于零的常数。

解　$AE(\alpha x)*BE(\beta x)=AB\int_{-\infty}^{+\infty}E(\alpha\xi)E(\beta(x-\xi))\mathrm{d}\xi=$

$$\begin{cases} 0 & (x\leq 0)\\ AB\int_0^t e^{-\alpha\xi}e^{-\beta(x-\xi)}\mathrm{d}\xi & (x>0)\end{cases}=$$

$$\begin{cases} 0 & (x\leq 0)\\ AB\dfrac{E(\alpha x)-E(\beta x)}{\beta-\alpha} & (x>0)\end{cases}$$

例 3-16　若已知 $f_1(x)=\begin{cases} 0 & (x<0)\\ e^{-x} & (x\geq 0)\end{cases}$ 与 $f_2(x)=\begin{cases} \sin x & (0\leq x\leq \frac{\pi}{2})\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$ 求 $f_1(x)*f_2(x)$。

解

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\xi)f_1(x-\xi)\mathrm{d}\xi=$$

$$\begin{cases} 0 & (x\leq 0)\\ \int_0^x \sin\xi e^{-(x-\xi)}\mathrm{d}\xi & (0<x\leq\frac{\pi}{2})\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\xi e^{-(x-\xi)}\mathrm{d}\xi & (x>\frac{\pi}{2})\end{cases}=$$

$$\begin{cases} 0 & (x\leq 0)\\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}) & (0<x\leq\frac{\pi}{2})\\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}) & (x>\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

例 3-17　求积分方程

$$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\tau|}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

的解。

解　原方程可写为:

$$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-|x|} * \varphi(x)$$

两边取傅里叶变换,结合例3-12、例3-13的结果得

$$2\pi e^{-\frac{1}{2}\omega^2} = \frac{2}{1+\omega^2}F[\varphi(x)]$$

即
$$F[\varphi(x)] = \pi(e^{-\frac{1}{2}\omega^2} + \omega^2 e^{-\frac{1}{2}\omega^2})$$

取傅里叶逆变换得

$$\varphi(x) = \pi F^{-1}[e^{-\frac{1}{2}\omega^2}] + \pi F^{-1}[\omega^2 e^{-\frac{1}{2}\omega^2}] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2} - \pi F^{-1}[(i\omega)^2 e^{-\frac{1}{2}\omega^2}] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2} - \pi F^{-1}[(i\omega)^2 F[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}]] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}F^{-1}[F(\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2}))] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

例3-18　用傅里叶变换法求解热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

解　记
$$u(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-iwx}dx$$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx$$

将泛定方程关于变量 x 进行傅里叶变换得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)e^{-i\omega x}dx = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}e^{-i\omega x}dx$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a^2F[u_{xx}]$$

由微分性得
$$F[u_{xx}]=-\omega^2F[u]$$

即得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-a^2\omega^2u$

对初始条件关于 x 进行傅里叶变换得
$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

即
$$u(\omega,0)=\varphi(\omega)$$

解常微分方程初值问题
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-a^2w^2u\\ u(\omega,0)=\varphi(\omega)\end{cases}$$

得 $u(\omega,t)=\varphi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}$

取傅里叶逆变换得
$$u(x,t)=F^{-1}[\varphi(\omega)\mathrm{e}^{-a^2w^2t}]=$$
$$F^{-1}\left[F[\varphi(x)]\cdot F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]\right]=$$
$$\varphi(x)*\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

例 3－19　解非齐次热传导方程的柯西问题:
$$(\mathrm{I})\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

解　方法 1　定解问题(Ⅰ)可拆为下面两柯西问题
$$(\mathrm{II})\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$
$$(\mathrm{III})\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\\ u(x,0)=0\end{cases}$$

现解柯西问题(Ⅲ)。

据齐次化原理,若 $w(x,t;\tau)$ 是定解问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & (t > \tau) \\ w(x,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

的解,则

$$M(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\,d\tau$$

是(Ⅲ)的解。

易得(Ⅲ)的解为

$$M(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau$$

由叠加原理结合例 18 的结论知柯西问题(Ⅰ)的解为:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau$$

方法 2　将泛定方程及初始条件关于变量 x 作傅里叶变换,记

$$u(\omega,t) = F[u(x,t)],\ F(\omega,t) = F[f(x,t)]$$

$\varphi(\omega) = F[\varphi(x)]$,则有

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -a^2\omega^2 u + F(\omega,t) \\ u(\omega,0) = \varphi(\omega) \end{cases}$$

解之得

$$u(\omega,t) = \varphi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t} + \int_0^t F(\omega,t)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\,d\tau$$

取傅里叶逆变换得

$$u(x,t) = F^{-1}[\varphi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}] + F^{-1}\left[\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\,d\tau\right] =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,d\xi +$$

$$F^{-1}\left[\int_0^t F(\omega,\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

现处理上式右端第二项,因

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)+\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\right](x-\xi) =$$

$$2\pi\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

所以 $F^{-1}\left[\int_0^t F(\omega,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right] =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega^2(t-\tau)+\mathrm{i}\omega(x-\xi)}\,\mathrm{d}\omega =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

例 3-20　**用傅里叶变换法求解三维热传导方程的柯西问题**:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) & (-\infty < x, y, z < +\infty, t > 0) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

解　**用多维傅里叶变换**

记 $\bar{u}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t) = F[u(x,y,z,t)] =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,z,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\bar{\varphi}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = F[\varphi(x,y,z)] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

注意到: $F[u_x] = \mathrm{i}\omega_1 F[u] = \mathrm{i}\omega_1\bar{u}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)$

$$F[u_{xx}] = (\mathrm{i}\omega_1)^2F[u] = -\omega_1^2\bar{u}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)$$

对柯西问题(Ⅰ)**取傅里叶变换得**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t} = -a^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\,\bar{u} \\ \bar{u}\Big|_{t=0} = \bar{\varphi}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) \end{cases}$$

解之得

$$u(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\,\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}$$

注意到:

$$F^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1x+\omega_2y+\omega_3z)}$$

$$\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega_3=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega_1^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1x}\mathrm{d}\omega_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega_2^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2y}\mathrm{d}\omega_2\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\omega_3^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_3z}\mathrm{d}\omega_3=\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi^3t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}$$

利用卷积定理得

$$u(x,y,z,t)=F^{-1}\left[\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\,\mathrm{e}^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}\right]=$$

$$\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi^3t^3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\delta)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\delta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\delta$$

例 3－21　**求下列函数的拉普拉斯变换。**

(1) $u(t)=\begin{cases}1 & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$

(2) $\sin kt,\cos kt$　(k **为实常数**)

(3) e^{at}　(a **为实常数**)

(4) t^m　(m **为正整数**)

(5) $\mathrm{e}^{-at}\sin kt,\mathrm{e}^{-at}\cos kt$　(a,k **为实常数**)

(6) $t\sin kt, t\cos kt$　(k **为实常数**)

解　(1) **由拉普拉斯变换的定义,有**

$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

(2) **由拉普拉斯变换的定义,有**

$$L[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kt\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}k)t}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}k)t}\mathrm{d}t\right]=$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{i}k}-\frac{1}{s+\mathrm{i}k}\right]=\frac{k}{s^2+k^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

同理　$L[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$

(3) **由拉普拉斯变换的定义,有**

$$L[\mathrm{e}^{at}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-a}\qquad(\mathrm{Re}(s)>a)$$

(4) **令** $f(t)=t^m$,**则**: $f^{(m)}(t)=m!$

又 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$

所以由微分性质:

$$L[m!]=L[f^{(m)}(t)]=s^mL[f(t)]-s^{m-1}f(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$$

得　$L[t^m]=\dfrac{1}{s^m}L[m!]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$

(5) **利用**(2) **的结果及平移性质易得**

$$L[\mathrm{e}^{-at}\sin kt]=\frac{k}{(s+a)^2+k^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>-a)$$

同理　$L[\mathrm{e}^{-at}\cos kt]=\dfrac{s}{(s+a)^2+k^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>-a)$

(6) **由象函数的微分性质得**

$$L[t\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L[\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right]=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

同理　$L[t\sin kt]=\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\qquad(\mathrm{Re}(s)>0)$

注 1:**本题结论在求拉普拉斯变换及逆变换时常用,应熟记。**

注 2:**求函数** $f(t)$ **的拉普拉斯变换时,一定要在结果中标明** $F(s)$ **的定义域。**

例 3－22　**利用拉普拉斯变换,计算下列广义积分。**

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$　　　(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t$

(3)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$

解　(1) **利用例** 3 − 21 **之**(4) **的结论,有**

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = L[t]\Big|_{s=2} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=2} = \frac{1}{4}$$

(2) **令** $f(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}$,**则**

$$L[f(t)] = L[\mathrm{e}^{-t}] - L[\mathrm{e}^{-2t}] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (\mathrm{Re}(s) > -1)$$

由象函数的积分性质,得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t = L\left[\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\right]_{s=0} = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right]\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x = \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$\ln 2$$

在计算过程中用到了函数 $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ **在** $\mathrm{Re}(s) > -1$ **内的解析性;积分与路径无关,取沿实轴积分。**

(3) **方法** 1　**由象函数的积分性质有**

$$L\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right] = \int_s^{\infty} L[\sin^2 t]\mathrm{d}s = \int_s^{\infty} L\left[\frac{1 - \cos^2 t}{2}\right]\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}\Big|_s^{\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}$$

又

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = L\left[\frac{\sin^2 t}{t^2}\right]\Big|_{s=0} = \int_s^{\infty} L\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]\mathrm{d}\tau\Big|_{s=0} =$$

$$\int_0^{\infty} L\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]\mathrm{d}s = \int_0^{\infty}\frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{4}\left[s\ln\frac{s^2+4}{s^2}\Big|_0^{\infty} + 8\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+4}\mathrm{d}s\right] = \frac{\pi}{2}$$

方法 2　**由分部积分得**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$$

注意到　$\frac{\sin^2 t}{t} = \sin t\frac{\sin t}{t}\xrightarrow{t\to 0} 0$,**有**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$$

由拉普拉斯变换的定义及象函数的积分性质,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t=L\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]\bigg|_{s=0}=\int_0^{\infty}L[\sin 2t]\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\infty}\frac{2}{s^2+4}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}$$

例 3 - 23　求下列函数的拉普拉斯逆变换 .

(1) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$　(2) $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$　(3) $\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$

(4) $\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$　(5) $\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}$

解　(1) **方法 1**　因 $\dfrac{1}{s^2(s+1)}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$

利用拉普拉斯变换的线性性质有

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=$$

$$t-1+\mathrm{e}^{-t}$$

方法 2:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2(s+1)},-1\right]=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{s+1}\right]+\lim_{s\to -1}\frac{\mathrm{e}^{st}}{s^2}=t-1+\mathrm{e}^{-t}$$

(2) **因** $\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}=L[\cos t]\cdot L[\cos t]$

由卷积定理知:

$$L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}\left[L[\cos t]\cdot L[\cos t]\right]=$$

$$\cos t*\cos t=$$

$$\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$$

(3) **由象函数的微分性质得**

$$tf(t) = -L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L[f(t)]\right]$$

即 $$L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)\right]$$

所以 $$L^{-1}\left[\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\ln\frac{s^2-1}{s^2}\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2-1)}\right] =$$

$$-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s}\right] =$$

$$-\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}-2)$$

(4) 因 $L[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$

由平移性质: $L[\mathrm{e}^{-t}\sin t] = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

所以 $$\frac{1}{(s^2+2s+2)^2} = \frac{1}{s^2+2s+2}\cdot\frac{1}{s^2+2s+2} =$$

$$L[\mathrm{e}^{-t}\sin t]\cdot L[\mathrm{e}^{-t}\sin t]$$

由卷积定理

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}\right] = (\mathrm{e}^{-t}\sin t) * (\mathrm{e}^{-t}\sin t) =$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\sin\tau\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}[t\cos t - \sin t]$$

(5) 因 $\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2} = \dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-2s}$, 所以由延迟性质得

$$L^{-1}\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-2s}\right] =$$

$$t+(t-2)u(t-2) = \begin{cases} t & (0\le t<2) \\ 2(t-1) & (t\ge 2)\end{cases}$$

例 3－24　用拉普拉斯变换法解常微分方程

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t & (3.15) \\ y(0) = 0, y'(0) = -\dfrac{1}{2} & (3.16) \end{cases}$$

解　由微分性及初始条件知:

$$L[y''(t)] = s^2 L[y(t)] - sy(0) - y'(0) = s^2 L[y(t)] + \frac{1}{2}$$

对(3.15)**式做拉普拉斯变换,得**

$$s^2 L[y(t)] + \frac{1}{2} + L[y(t)] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

即　$$L[y(t)] = \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

取逆变换得

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{2(s^2+1)}\right] =$$

$$\sin t * \sin t - \frac{1}{2}\sin t = -\frac{1}{2} t\cos t$$

例 3－25　用拉普拉斯变换法解常微分方程

$$\begin{cases} T''(t) + \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) & (3.17) \\ T_n(0) = \varphi_n, T'_n(0) = \psi_n & (3.18) \end{cases}$$

其中 $f_n(t), \varphi_n, \psi_n$ **均已知。**

解　对(3.17)**式取拉普拉斯变换,结合微分性质及初始条件,有**

$$s^2 L[T_n(t)] - s\varphi_n - \psi_n + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 L[T_n(t)] = L[f_n(t)]$$

即　$$L[T_n(t)] = \frac{L[f_n(t)]}{s^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2} + \frac{s\varphi_n}{s^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2} + \frac{\psi_n}{s^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}$$

取逆变换,得

$$T_n(t) = L^{-1}\left[\frac{L[f_n(t)]}{s^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{s\varphi_n}{s^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\right] +$$

$$L^{-1}\left[\frac{\psi_n}{s^2+(\frac{an\pi}{l})^2}\right]$$

因 $L\left[\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t\right]=\frac{1}{s^2+(\frac{an\pi}{l})^2}$

$$L\left[\cos\frac{an\pi}{l}t\right]=\frac{s}{s^2+(\frac{an\pi}{l})^2}$$

所以

$$T_n(t)=L^{-1}\left[L[f_n(t)]\cdot L[\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t]\right]+$$

$$\phi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t=$$

$$f_n(t)*(\frac{l}{an\pi}\sin\frac{an\pi}{l}t)+\phi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t=$$

$$\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}d\tau+\phi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+$$

$$\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t$$

例 3－26　用拉普拉斯变换法求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & (0<x<l,\ t>0)\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=\sin wt \end{cases}$$

解　由于 x 的变化范围是 $0<x<l$,所以只能取关于 t 的拉普拉斯变换。以 $u(x,s)$ 记函数 $u(x,t)$ 关于 t 的拉普拉斯变换,对方程和边界条件进行拉普拉斯变换,并代入初始条件,得

$$\begin{cases} a^2\dfrac{d^2u(x,s)}{dx^2}=s^2u(x,s)\\ u(0,s)=0,\ u_x(l,s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{cases}$$

解之得

$$u(x,s)=\frac{a\omega}{s(s^2+\omega^2)}\frac{\sinh\frac{x}{a}s}{\cosh\frac{l}{a}s}$$

取逆变换,得

$$u(x,t)=L^{-1}\left[\frac{a\omega}{s(s^2+\omega^2)}\frac{\sinh\frac{x}{a}s}{\cosh\frac{l}{a}s}\right]=$$

$$\sum_i \operatorname*{Res}_{s=s_i}\left[\frac{a\omega}{s(s^2+\omega^2)}\frac{\sinh\frac{x}{a}s}{\cosh\frac{l}{a}s}e^{st}\right]$$

其中 s_i 为函数 $F(s)=\dfrac{a\omega}{s(s^2+\omega^2)}\dfrac{\sinh\frac{x}{a}s}{\cosh\frac{l}{a}s}$ 的奇点,即是使

$$s(s^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}s=0$$

的点,这些点是

$$0,\ \pm i\omega,\ \pm i\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

且都是一级极点,所以:

$$u(x,t)=\operatorname{Res}[F(s),0]+\operatorname{Res}[F(s),i\omega]+\operatorname{Res}[F(s),-i\omega]+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}[F(s),s_k]=\lim_{s\to 0}\frac{a\omega\sinh\frac{x}{a}s}{(s^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}s}e^{st}+$$

$$\lim_{s\to i\omega}\frac{a\omega\sinh\frac{x}{a}s}{s(s+i\omega)\cosh\frac{l}{a}s}e^{st}+\lim_{s\to i\omega}\frac{a\omega\sinh\frac{x}{a}s}{s(s-i\omega)\cosh\frac{l}{a}s}e^{st}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\omega\sinh\frac{x}{a}s}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[s(s^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}s\right]}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=\mathrm{i}\frac{a}{l}(k-\frac{1}{2})\pi} +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\omega\sinh\frac{x}{a}s}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s(s^2+\omega^2)\cosh\frac{l}{a}s]}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-\mathrm{i}\frac{a}{l}(k-\frac{1}{2})\pi} =$$

$$\frac{a\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\omega\cos\frac{\omega}{a}l} + \frac{2a^2\omega^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\omega_k}$$

其中 $\omega_k = \frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$

3.4 习题全解

1\. **求方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x^2 y \tag{1}$$

满足边界条件

$$u|_{y=0} = x^2 \tag{2}$$

$$u|_{x=1} = \cos y \tag{3}$$

的解。

解　方法 1　**对**(1) **式两端积分得通解**

$$u(x,y) = \frac{x^3y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \tag{4}$$

其中 $\varphi_1(y),\varphi_2(x)$ **为任意二阶可微函数**

由式(2),(3) **得**

$$\begin{cases} \varphi_1(0) + \varphi_2(x) = x^2 \\ \frac{y^2}{6} + \varphi_1(y) + \varphi_2(1) = \cos y \end{cases}$$

解得　$\varphi_1(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - 1 + \varphi_1(0)$

$$\varphi(x) = x^2 - \varphi(0)$$

代入式(4)得

$$u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} - \frac{y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1$$

方法 2　以 $u(x, s)$ 记 $u(x, y)$ 关于变量 y 的拉普拉斯变换,即

$$u(x, s) = \int_0^{+\infty} u(x, y) e^{-sy} dy$$

对式(1)关于 y 取拉普拉斯变换,并利用微分性质得

$$sL\left[\frac{u}{x}\right] - \frac{u}{x}\bigg|_{y=0} = \frac{x^2}{s^2} \tag{5}$$

由式(2)得

$$\frac{u}{x}\bigg|_{y=0} = 2x$$

代入式(5)得

$$s\frac{du}{dx} - 2x = \frac{x^2}{s^2} \tag{6}$$

对式(3)关于 y 取拉普拉斯变换得

$$u(x, s)\bigg|_{x=1} = \frac{s}{s^2 + 1} \tag{7}$$

式(6)与(7)联立解得

$$u(x, s) = \frac{x^3}{3s^3} + \frac{x^2}{s} + \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3}$$

取逆变换得

$$u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} + x^2 + \cos y - 1 - \frac{y^2}{6}$$

2. 求解波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

解　方法 1: $u(x, t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \sin\tau d\tau + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin\xi d\xi =$

$$\frac{1}{2}[\cos(x - t) - \cos(x + t) - \int_0^t \tau\cos(x$$

$$- t + \tau) d\tau - \int_0^t \tau \cos(x + t - \tau) d\tau] =$$

$$t \sin x$$

方法 2:用傅里叶变换法。

$$u(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ix\omega} dx$$

对方程及初始条件关于变量 x 取傅里叶变换,得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u + i\pi t[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{du}{dt}\bigg|_{t=0} = i\pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \end{cases}$$

解之得

$$u(\omega, t) = \frac{i\pi}{\omega^2}[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] t +$$

$$\frac{i\pi}{\omega}\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right)[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \sin\omega t$$

取傅里叶逆变换得

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\omega, t) e^{ix\omega} d\omega =$$

$$\frac{it}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2}[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] e^{ix\omega} d\omega +$$

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right)[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] e^{ix\omega} \sin\omega t \, d\omega =$$

$$\frac{t}{2i}[e^{ix} - (-e^{-ix})] = t \sin x$$

3. **证明傅里叶变换的卷积定理。**

$$F^{-1}[F_1(\omega) F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t)$$

其中 $f_1(t) = F^{-1}[F_1(\omega)]$, $f_2(t) = F^{-1}[F_2(\omega)]$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(t - \xi) d\xi$$

证 因

$$F_1[f_1(t)*f_2(t)] = F_1\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi$$

令 $\xi' = x - \xi$,则

$$F[f_1(t)*f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\xi+\xi')}\mathrm{d}\xi'\right]\mathrm{d}\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi'}\mathrm{d}\xi' =$$

$$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

结论保证。

4. 证明见本章例 3－13。

5. 用积分变换法解下列问题:

$$\begin{cases} \dfrac{{}^2 u}{x\ \ y} = 1 \quad (x > 0, y > 0) \\ u|_{x=0} = y + 1 \\ u|_{y=0} = 1 \end{cases}$$

解　令

$$u(s, y) = \int_0^{+\infty} u(x, y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

对泛定方程关于变量 x 取拉普拉斯变换得

$$L[u_{xy}] = \frac{1}{s}$$

由拉普拉斯变换的定义及微分性质,有

$$L[u_{xy}] = \int_0^{+\infty} u_{xy}(x, y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{}{y}\left[\int_0^{+\infty} u_x(x, y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right] = \frac{}{y}[L[u_x]] =$$

$$\frac{}{y}[sL[u(x, y)] - u(0, y)] =$$

$$\frac{\ }{y}[su(s,y) - y - 1] = s\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - 1$$

即得

$$s\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - 1 = \frac{1}{s}$$

解之得　$u(s,y) = \frac{s+1}{s^2}y + c$

因　$u(s,0) = \int_0^{+\infty} u(x,0)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}$

所以可得

$$u(s,y) = \frac{s+1}{s^2}y + \frac{1}{s}$$

取逆变换得

$$u(x,y) = yL^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = xy + y + 1$$

6. 求上半平面内静电场的电位,即解下列定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, y > 0 & (1) \\ u|_{y=0} = f(x) & (2) \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u = 0 & (3) \end{cases}$$

解　记 $u(\omega,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

对式(1)两端关于变量 x 取傅里叶变换,结合微分性得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \omega^2 u = 0$$

其通解为

$$u(\omega,y) = C_1\mathrm{e}^{\omega y} + C_2\mathrm{e}^{-\omega y} \tag{4}$$

对式(2)两端取傅里叶变换,得

$$u(\omega,0) = F(\omega) \tag{5}$$

由式(4)(5)得

$$u(\omega, y) = C_1 e^{\omega y} + (F(\omega) - C_1) e^{-\omega y}$$

由式(3)得

$$\lim_{y \to +\infty} u(\omega, y) = 0 \tag{6}$$

(ⅰ) 当 $\omega = 0$ 时,显然 $u(\omega, y) = F(\omega)$

(ⅱ) 当 $\omega > 0$ 时,若要满足(6)式须有 $C_1 = 0$,即

$$u(\omega, y) = F(\omega) e^{-\omega y}$$

(ⅲ) 同理 $\omega < 0$ 时,

$$u(\omega, y) = F(\omega) e^{\omega y}$$

综上知　$u(\omega, y) = F(\omega) e^{-|\omega| y}$　(7)

易知　$F^{-1}[e^{-|\omega| y}] = \dfrac{y}{\pi(y^2 + x^2)}$

对式(7)取逆变换,由卷积定理得

$$u(x, y) = F^{-1}[F(\omega) e^{-|\omega| y}] =$$

$$F^{-1}\left[F[f(x)] \cdot F\left[\frac{y}{\pi(y^2 + x^2)}\right] \right] =$$

$$f(x) * \frac{y}{\pi(y^2 + x^2)} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2 + (x - \tau)^2} f(\tau) \, d\tau$$

7. 用积分变换法解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \left.\dfrac{u}{x}\right|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = u \end{cases}$$

解　令 $u(x, s) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} \, dt$

对泛定方程关于 t 取拉普拉斯变换,结合微分性质得

$$s u(x, s) - u(x, 0) = a^2 u_{xx}(x, s)$$

由初始条件,得

$$a^2 u_{xx}(x, s) - s u(x, s) = u_0$$

即　$u_{xx}(x, s) - \dfrac{s}{a^2} u(x, s) = -\dfrac{u_0}{a^2}$

看初始条件

$$u_x(0,s)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{x=0}=$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\Bigg|_{x=0}=$$

$$\int_0^{u}u_x(0,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=0$$

$$u(t,s)=\int_0^{+\infty}u(l,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=u_1\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{u_1}{s}$$

求解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s}{a^2}u=-\dfrac{u_0}{a^2}\\[2ex] u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=\dfrac{u_1}{s}\end{cases}$$

得

$$u(x,s)=\frac{u_0}{s}+\frac{u_1-u_0}{s}\,\frac{\cosh\dfrac{\sqrt{s}}{a}x}{\cosh\dfrac{\sqrt{s}}{a}l}$$

第四章 拉普拉斯方程的格林函数法

4.1 内容要点

1. **格林公式**

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ 是以足够光滑的曲面，Γ 为边界的有界区域。函数 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在 $\Omega + P$ 上具有一阶连续偏导数，在 Ω 内具有连续的所有二阶偏导数，则有

(1) 第一格林公式：

$$\iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla^2 v \mathrm{d}V + \iiint_{\Omega} u \nabla v \mathrm{d}V$$

(2) 第二格林公式：

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \mathrm{d}V = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S$$

2. **拉普拉斯方程的基本解**

函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^{n-2}} & (n \neq 2) \\ \ln \dfrac{1}{r} & (n = 2) \end{cases}$$

称为 n 维拉普拉斯方程的基本解。其中 r 是 R^n 中两点

$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 之间的距离。基本解的主要特征是在 $x = x^0$ 处有奇性，除这一点以外，满足拉普拉斯方程。

3. **调和函数的基本性质**

(1) 基本积分公式：

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s \qquad M_0 \in \Omega$$

(2) $\oint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = 0$

(3) **平均值公式**:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{S_R^{M_0}} u\,\mathrm{d}s$$

其中 $S_R^{M_0}$ **是以** M_0 **为心**, R **为半径且完全含于** Ω **的球面。**

4. **格林函数的定义**

令 $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} + v$, **且** $G(M, M_0)\big|_{\Gamma} = 0$, **则** $G(M, M_0)$ **称为区域** Ω **上拉普拉斯方程狄里克雷问题的格林函数。其中** v **满足**

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 & (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \\ v\big|_{\Gamma} = -\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}}\Big|_{\Gamma} \end{cases}$$

5. **特殊区域上的格林函数**

(1) **上半空间的格林函数**:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{1}{r_{M_1 M}}\right]$$

其中 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **为上半空间内的点**, $M_1 = (x_0, y_0, -z_0)$

(2) **球域的格林函数**:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1 M}}\right)$$

其中 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **为球内的点**, M_1 **为** M_0 **关于球面的反演点**, R **为球的半径**, $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$。

6. **特殊区域上拉普拉斯方程狄里克雷问题的解**

(1) **上半空间上狄里克雷问题**:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (z \geq 0) \\ u\big|_{z=0} = f(x, y) \end{cases}$$

的解为

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{z=0} \frac{z_0 f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 球上狄里克雷问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (x^2+y^2+z^2 \leq R^2) \\ u|_\Gamma = f & (\Gamma: x^2+y^2+z^2 = R^2) \end{cases}$$

的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_\Gamma \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} f\mathrm{d}S$$

或写成球坐标的形式为

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\theta,\varphi)\cdot$$

$$\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

其中$(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$为点 M_0 的坐标,(ρ, θ, φ)是球面 Γ 上点 P 的坐标,$\cos\gamma$ 是 OM_0 与 OP 夹角的余弦。

4.2　基本要求

(1) 掌握二维、三维下的第一、第二格林公式。

(2) 掌握调和函数的基本性质。

(3) 会用格林函数法求解一些特殊区域上的拉普拉斯方程狄里克雷问题的解。

4.3　例题分析

例 4－1　验证 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(r)$(其中 $r = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$)是 n 维调和函数,其中

$$f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}} \qquad (n \neq 2)$$

$$f(r) = C_1 + C_2 \ln \frac{1}{r} \qquad (n = 2)$$

C_1, C_2 为任意常数。

证 ① $n = 2$ 时,因 $r_{x_1} = \frac{x_1}{r}, r_{x_2} = \frac{x_2}{r}$,所以

$$u_{x_1} = f'(r) r_{x_1} = -\frac{x_1}{r^2}$$

$$u_{x_1 x_1} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x_1}{r^3} r_{x_1} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x_1^2}{r^4}$$

同理 $u_{x_2 x_2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x_2^2}{r^4}$

所以 $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$

即 $u = f(r)$ 是二维调和函数。

② $n \neq 2$ 时

$$u_{x_i} = f'(r) r_{x_i} = -\frac{c_2 (n-2) x_i}{r^n}$$

$$u_{x_i x_i} = -\frac{c_2 (n-2)}{r_n} + \frac{c_2 n(n-2) x_i}{r^{n+1}} r_{x_i} =$$

$$-\frac{c_2 (n-2)}{r^n} + \frac{c_2 n(n-2) x_i^2}{r^{n+2}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

得 $\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$

即 $u = f(r)$ 是 n 维调和函数。

注:也可直接利用二维拉普拉斯方程的极坐标表示式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

来证明。

例 4-2 证明拉普拉斯算子在柱面坐标(v, θ, z)下可写成

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial u}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

证　**做柱坐标变换**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

由 $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **得**

$$r_x = \frac{x}{r},\ r_y = \frac{y}{r},\ \theta_x = -\frac{y}{r^2},\ \theta_y = -\frac{x}{r^2}$$

所以

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = \frac{x}{r}u_r - \frac{y}{r^2}u_\theta$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y = \frac{y}{r}u_r + \frac{x}{r^2}u_\theta$$

进一步求偏导得

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} + \frac{y^2}{r^3}u_r - \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^4}u_\theta$$

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + \frac{x^2}{r^3}u_r + \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} - \frac{2xy}{r^4}u_\theta$$

即得

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} =$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

例 4 − 3　**证明拉普拉斯算子在球坐标**(v, θ, φ) **下可以写成**

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

证　**首先做变换**:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

利用例 4 − 2 **的结论得**

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi}+u_{zz} \tag{4.1}$$

再做变换:

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ \rho = r\sin\theta \\ \phi = \phi \end{cases}$$

得到

$$u_{zz}+u_{\rho\rho}+u_{\phi\phi}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{\phi\phi}$$

即

$$u_{zz}+u_{\rho\rho}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \tag{4.2}$$

将式(4.2)代入式(4.1)得

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} \tag{4.3}$$

因

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r\sin\theta},\ \frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta},\ u_\rho=u_r r_\rho+u_\theta\theta_\rho=u_r\sin\theta+u_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

代入式(4.3)得

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}=$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

例 4-4　证明平面第二格林公式

$$\iint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

其中 Γ 为 Ω 的边界曲线。

证　在散度定理

$$\iint_\Omega \mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

中取 $\mathbf{A}=u\nabla v$ 得

$$\iint_{\Omega}(u\nabla^2 v+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{4.4}$$

即为第一格林公式。

在式(4.4)中交换 u,v 顺序,即得

$$\iint_{\Omega}(v\nabla^2 u+\nabla v\cdot\nabla u)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{4.5}$$

式(4.4),式(4.5),结论保证。

例 4-5　证明平面第三格林公式

$$2\pi u(M_0)=-\int_{\Gamma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}s-\iint_{\Omega}\ln\frac{1}{r}\nabla^2 u\mathrm{d}\Omega$$

其中 M_0 为 Ω 内任一点。

证　以 M_0 为心,ε 为半径做圆 k_ε,使之完全落于 Ω 内,设其边界为 k_ε,在 $\Omega\backslash k_\varepsilon$ 上用第二格林公式,取 $v(M)=\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}\ln\frac{1}{r}$(由例 4-1 知,除 M_0 外,v 调和)得

$$\int_{\Gamma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}s+\int_{k_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}s=$$

$$-\iint_{\Omega\backslash k_\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\nabla^2 u\mathrm{d}\Omega \tag{4.6}$$

因　$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{k_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{k_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s\right]=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{k_\varepsilon}u\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}u(x_0+$$

$$\varepsilon\cos\theta,y_0+\varepsilon\sin\theta)\varepsilon\mathrm{d}\theta=\varepsilon\pi u(x_0,y_0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon k_\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{k_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{(x_0,y_0)}=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Omega\backslash k_\varepsilon}\ln\frac{1}{r}\nabla^2 u\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Omega}\ln\frac{1}{r}\nabla^2 u\Delta\Omega$$

在式(4.6)中令 $\varepsilon\to 0$,得

$$\int_\Gamma\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds+2\pi u(M_0)=-\iint_\Omega\ln\frac{1}{r}\nabla^2 u\,d\Omega$$

结论保证。

注:由该题结论可得二维调和函数的基本积分公式:

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]ds \qquad (4.7)$$

例4-6 证明平均值公式:设 B 为以 M_0 为心,R 为半径的圆,C 为 B 的边界,u 在 B 内调和,$u\in C^2(B)\cap C^1(B+C)$,则

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C u\,ds$$

证 在 C 上:$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}$,所以由式(4.7)得

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{u}{r}\right]ds=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R}\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds+\frac{1}{R}\int_C u\,ds\right]=\frac{1}{2\pi R}\int_C u\,ds$$

例4-7 证明,当 $u(M)$ 在闭曲面 Γ 的外部调和,并且在无穷远处成立:

$$u(M)=o\left(\frac{1}{r_{OM}}\right),\ \frac{\partial u}{\partial r}=o\left(\frac{1}{r_{OM}^2}\right)\quad(r_{OM}\to\infty)$$

而 M_0 是 Γ 外任一点,成立

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]ds \qquad (4.8)$$

证 以原点为心,R 为半径做球面 Γ_R,使得 Γ 和 M_0 完全落于其中,因 u 在 Γ 和 Γ_R 包围的区域内调和,由调和函数的基本积分公式得

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma+\Gamma_R}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds-$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma_R}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}s \tag{4.9}$$

现处理右端第二项:

在 Γ_R 上

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{x-x_0}{r_{M_0M}^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{y-y_0}{r_{M_0M}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)=-\frac{z-z_0}{r_{M_0M}^2}$$

所以

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right|\leq\left|\nabla\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right|\,|\,n\,|=\frac{1}{r_{M_0M}^2}$$

当 R 充分大时,有

$$\left|\iint_{\Gamma_R}u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\mathrm{d}s\right|\leq\iint_{\Gamma_R}|\,u(M)\,|\left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right|\mathrm{d}s\leq$$

$$C\iint_{\Gamma_R}\frac{1}{r_{0M}}\frac{1}{r_{M_0M}^2}\mathrm{d}s\leq C\iint_{\Gamma_R}\frac{1}{R}\frac{1}{|\,R-r_{0M_0}\,|^2}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{R(R-r_{0M_0})^2}\cdot4\pi R^2\xrightarrow{R\to+\infty}0$$

在式(4.9)中令 $R\to+\infty$,即得结论。

例 4－8　设有圆域 $r<R$ 上的拉普拉斯方程第二边值问题:

$$\nabla^2u=0\qquad(r<R) \tag{4.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R}=\sin\frac{\theta}{4}\quad(\theta\in[0,2\pi]) \tag{4.11}$$

此问题是否有解?

解　在第二格林公式中取 Ω 为圆域 $r<R$, u 为调和函数, $v\equiv1$,得

$$\int_{r=R}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0 \tag{4.12}$$

但由式(4.11)

$$\int_{r=R}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{4}\cdot R\mathrm{d}s=4R \tag{4.13}$$

和式(4.12)矛盾,故原问题无解。

注:一般地讲,区域Ω上拉普拉斯方程有解的必要条件为

$\int_\Gamma \frac{u}{n}\mathrm{d}s = 0$,其中$\Gamma$为区域$\Omega$的边界。

例 4 - 9 给出二维区域Ω上狄里克雷问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 上} \quad (4.14) \\ u|_\Gamma = \varphi & (\Gamma \text{ 为 } \Omega \text{ 的边界}) \quad (4.15) \end{cases}$$

的格林函数,并建立格林函数和该问题的解之间的联系。

解 从二维调和函数的基本积分公式出发

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left[\ln\frac{1}{r}\,\frac{u}{n} - u\frac{}{n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s \tag{4.16}$$

在第二格林公式中选v为调和函数得

$$0 = \int_\Gamma \left(v\frac{u}{n} - u\frac{u}{n}\right)\mathrm{d}s \tag{4.17}$$

式(4.16)和式(4.17)相加,得

$$u(M_0) = \int_P \left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v\right)\frac{u}{n} - u\frac{}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v\right)\mathrm{d}s \tag{4.18}$$

令 $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}} + v$,且$G(M, M_0)|_\Gamma = 0$

为区域Ω上狄里克雷问题的格林函数。

其中v满足

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0 \\ v|_\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\Big|_\Gamma \end{cases}$$

由式(4.18)得式(4.14)与(4.15)的解为:

$$u(M_0) = -\int_\Gamma u\frac{G}{n}\mathrm{d}s = -\int_\Gamma \varphi\frac{G}{n}\mathrm{d}s \tag{4.19}$$

例 4 - 10 解圆域上的狄里克雷问题

$$\begin{cases} \nabla u = 0 & (x^2 + y^2 < R^2) \quad (4.20) \\ u|_c = f(\theta) & (C: x^2 + y^2 = R^2) \quad (4.21) \end{cases}$$

解 首先给出圆域上的格林函数:设M_0为圆内任一固定点,在

M_0 放一单位正电荷, M_0 关于圆周的反演点记为 M_1, (见图 4－1) 即

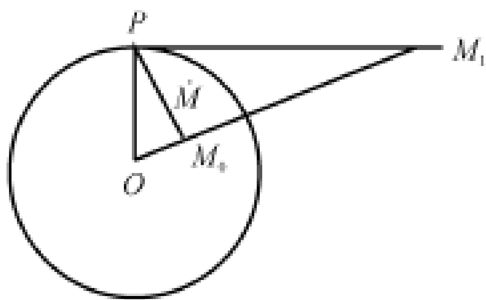


图 4－1

$$r_{0M_0} \cdot r_{0M_1} = R^2$$

在 M_1 处放电量为 q 的负电荷, P 为球面上任一点, 要保证球面上电势为零, 必有

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{q}{r_{M_1P}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0P}}$$

所以 q 需满足

$$q = \frac{r_{M_1P}}{r_{M_0P}}$$

由 $\Delta OM_0P \backsim \Delta OPM_1$ 知

$$\frac{r_{M_0P}}{r_{M_1P}} = \frac{r_{OM_0}}{R} \qquad q = \frac{R}{r_{OM_0}}$$

设 M 为球内任一点, 记 $\rho = r_{OM}$, $\rho_0 = r_{OM_0}$, $\rho_1 = r_{OM_1}$, γ 为 OM 和 OM_0 的夹角, 则

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma}} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\gamma}}\right]$$

设 OM_0 与 OM 的方向余弦分别是 $(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ 和 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 则

$$\cos\gamma = \cos(\theta-\theta_0) = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0$$

因:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_c = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} =$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}} - \ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}}\right]\right\}\Bigg|_{\rho=R} =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\rho-\rho_0\cos\gamma}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma}-\frac{\rho_0^2\rho-R^2\rho_0\cos\gamma}{\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}\right\}\Bigg|_{\rho=R}=$$

$$-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}$$

由例4-9的结果即得式(4.20),式(4.21)式的解为

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\rho=R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}f(\theta)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (4.22)$$

例4-11　若函数 $u(x,y)$ 是单位圆上的调和函数,在单位圆周上 $u=\sin\theta$(θ为极角),问 u 在原点的值等于多少?

解　解法1　由平均值公式(见例4-6)知:

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{r=1}\sin\theta\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

解法2　由(4.22)式,其中 $\rho_0=0$,得

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

注:有了例4-11的结果,不仅可求出 u 在圆心处值,且圆内任一点的值都可得到。

例4-12　试求一函数 u,使其在半径为 α 的圆的内部是调和的,而且在圆周 C 上取值为:$u|_c=A\cos\theta$(A 为常数)

解　选极坐标系,设圆内任一点 M_0 的坐标为(ρ_0,θ_0) 由(4.22)式得

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A\cos\theta}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}\mathrm{d}\theta$$

用留数来计算该积分。

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta_0)}$,则 $\cos(\theta-\theta_0)=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}+z^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}),\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z,\text{得}$$

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{A(a^2-\rho_0^2)}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{2}(ze^{i\theta_0}+z^{-1}e^{-i\theta_0})}{a^2-a\rho_0(z+z^{-1})+\rho_0^2}\frac{1}{iz}dz=$$

$$\frac{A(a^2-\rho_0^2)}{4\pi a^2 i}\int_{|z|=1}\frac{z^2e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0}}{(1-\frac{\rho_0}{a}z)(z-\frac{\rho_0}{a})z}dz$$

令 $I=\int_{|z|=1}\frac{z^2e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0}}{(1-\frac{\rho_0}{a}z)(z-\frac{\rho_0}{a})z}dz\xlongequal{def}\int_{|z|=1}f(z)dz$

则

$$I=2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(0),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{\rho_0}{a}]\right\}=$$

$$2\pi i\left\{\lim_{z\to 0}\frac{z^2e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0}}{(1-\frac{\rho_0}{a}z)(z-\frac{\rho_0}{a})}+\lim_{z\to\frac{\rho_0}{a}}\frac{z^2e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0}}{(1-\frac{\rho_0}{a}z)z}\right\}=$$

$$2\pi i\left\{-\frac{a}{\rho_0}e^{-i\theta_0}+\frac{a}{\rho_0}\frac{\rho_0^2e^{i\theta_0}+a^2e^{-i\theta_0}}{a^2-\rho_0^2}\right\}=$$

$$2\pi i\frac{a\rho_0(e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0})}{a^2-\rho_0^2}$$

原问题的解为

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{A\rho_0}{2\pi}(e^{i\theta_0}+e^{-i\theta_0})=\frac{A\rho_0}{a}\cos\theta_0$$

4.4 习题全解

1. **见例** 4－4。

2. **见例** 4－1。

3. **见例** 4－5。

4. **试定义平面上的格林函数,并导出平面上拉普拉斯方程狄里克雷问题的解。**

解 **上半平面上拉普拉斯方程狄里克雷问题为**

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & (y > 0)\\ u\big|_{y=0} = f(x)\end{cases}$$

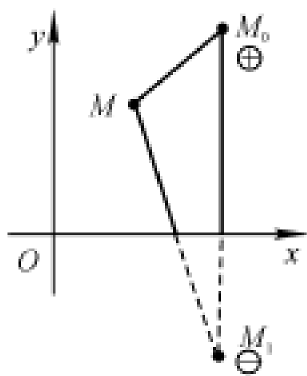


图 4-2

设 $M_0(x_0, y_0)$ 为上半平面上的任一点，利用格林函数的物理意义知：在 M_0 点处放一单位正电荷，M_0 关于 x 轴的对称点 M_1 处放一单位负电荷后上半平面上的点 M 处的电势即为格林函数 $G(M, M_0)$ 在 M 处的值（见图 4-2），即

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - \ln\frac{1}{r_{M_1M}}\right] = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

又

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{y=0} = -\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

由例 4-9 的结果即得定解问题（I）的解为

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. 见例 4-9，例 4-10。

第五章　贝塞尔函数

5.1　内容要点

1. 贝塞尔函数的基本概念

(1) 贝塞尔方程的引入:在柱坐标系下对拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程进行分离变量,将导出 n 阶贝塞尔方程:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y(x)=0$$

(2) 贝塞尔方程的解:

(ⅰ) 第一类贝塞尔函数:利用级数解法可得贝塞尔方程的两个特解

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m}m!\Gamma(-n+m+1)}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是伽马函数,称 $J_n(x)(J_{-n}(x))$ 为 $n(-n)$ 阶的第一类贝塞尔函数。

注:当 $n=m$(整数) 时: $J_m(x)=(-1)^m J_m(-x)$

(ⅱ) 第二类贝塞尔函数:定义

$$Y_n(x)=\begin{cases}\dfrac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & (n\neq\text{整数})\\ \lim\limits_{\alpha\to n}\dfrac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} & (n\text{为整数})\end{cases}$$

为 n 阶的第二类贝塞尔函数(又称诺依曼函数)

(ⅲ) 第三类贝塞尔函数:通常定义

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \mathrm{i}Y_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \mathrm{i}Y_n(x)$$

为第三类贝塞尔函数(又称汉克尔函数),其中 i 为虚数单位。

(3) n 阶贝塞尔方程的通解:通常有下列三种形式:

(ⅰ) $y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$　　($n \neq$ 整数)

(ⅱ) $y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x)$　　(n 为任意数)

(ⅲ) $y(x) = AH_n^{(1)}(x) + BH_n^{(2)}(x)$　　(n 为任意数)

2. 贝塞尔函数的递推公式

第一组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{5.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{5.2}$$

注:作为特殊情形　$J'_0(x) = -J_1(x)$　(5.3)

第二组:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \tag{5.4}$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \tag{5.5}$$

第三组:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m [x^n J_n(x)] = x^{n-m} J_{n-m}(x) \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m [x^{-n} J_n(x)] = (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}(x) \tag{5.7}$$

注:算子$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m$不能和$\frac{\mathrm{d}^m}{x^m \mathrm{d}x^m}$混淆。

注:第二类和第三类贝塞尔函数与 $J_n(x)$ 有类似的递推公式。

3. 第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$ 零点的性质

(1) $J_n(x)$ 有无穷多个单重实零点,且这无穷多个零点在 x 轴上关于原点是对称分布着的,因而 $J_n(x)$ 必有无穷多个正的零点。

(2) $J_n(x)$ 的零点与 $J_{n+1}(x)$ 的零点是彼此相间分布的,即 $J_n(x)$

的任意相邻零点之间必存在一个且仅有一个 $J_{n+1}(x)$ 的零点。

(3) 以 $\mu_m^{(n)}$ 表示 $J_n(x)$ 的正零点,则 $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}$ 当 $m\to\infty$ 时无限地接近于π,即 $J_n(x)$ 几乎是以 2π 为周期的周期函数。

4. 贝塞尔函数系的正交完全性

(1) 函数系 $\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ 在[0, R] 上带权重 r 正交,即

$$\int_0^R xJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}x\right)\mathrm{d}x=$$

$$\begin{cases}0 & (m\neq k)\\ \dfrac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})=\dfrac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}) & (m=k)\end{cases}$$

其中 $\int_0^R xJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)\mathrm{d}x=\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})$ 的平方根为 $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)$ 的模。

(2) 除了正交性外,函数系 $\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ 还是完全的,所谓完全性是指除了这个函数系中的函数彼此正交外不存在其他的非零函数与这个系中的所有函数都正交。

5. 函数沿贝塞尔函数系的展开

因为函数系 $\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ 是完全正交的,若函数 $f(x)$ 在[0, R] 上满足条件:

(1) $f(x)$ 在区间(0, R) 内是逐段光滑的函数;

(2) 积分 $\int_0^R f^2(x)\mathrm{d}x$ 具有有限值。

则 $f(x)$ 在(0, R) 上可以展开为级数:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)$$

其中

$$A_m=\frac{1}{\frac{R^2}{2}J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)})}\int_0^R xf(x)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}x\right)\mathrm{d}x$$

该级数在区间$(0, R)$内部$f(x)$的任一连续点x处收敛于$f(x)$，在$f(x)$的间断点x_0处，收敛于x_0点左右极限的平均值。

*6. 贝塞尔函数的几种表示式，母函数与加法公式

(1) 积分表示形式:

定积分表示

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - m\theta) d\theta$$

围道积分表示

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}}{z^{m+1}} dz$$

(2) 母函数:

函数

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m \qquad (0 < |t| < \infty)$$

称为贝塞尔函数$J_m(x)(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的母函数。

(3) 加法公式:

$$J_m(x + y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{m-k}(y)$$

*7. 贝塞尔函数的渐近公式

(1) 当$x \to 0$时，有

$$J_n(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)} \qquad (n \neq -1, -2, \cdots)$$

当$x \to \infty$时

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + o\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

(2) 当$x \to 0$时，有

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x$$

$$Y_n(x) \approx -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \Gamma(n) \qquad (n \neq 0)$$

当 $x \to \infty$ 时

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

(3) 当 $x \to 0$ 时, 有

$$H_n^{(1)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad (n > 0)$$

$$H_0^{(1)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln x$$

$$H_n^{(2)}(x) \approx \mathrm{i}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad (n > 0)$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx -\mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln x$$

当 $x \to \infty$ 时:

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

***8. 变形(虚宗量)的贝塞尔函数**

(1) **变形(虚宗量)的贝塞尔方程:**

微分方程

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad (5.8)$$

称为变形(虚宗量)的贝塞尔方程。

令 $x = -\mathrm{i}t$, **方程**(5.8) **变为贝塞尔方程**

$$t^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (t^2 - n^2)y = 0$$

(2) **第一类变形(虚宗量)的贝塞尔函数:**

函数

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

称为第一类变形(虚宗量)的贝塞尔函数。

(3) 第二类变形(虚宗量)的贝塞尔函数:

$$k_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi[I_{-n}(x)-I_n(x)]}{2\sin nx} & (n\neq\text{整数})\\ \lim\limits_{v\to n}\dfrac{\pi[I_{-v}(x)-I_v(x)]}{2\sin vx} & (n=\text{整数})\end{cases}$$

(4) 方程(5.8)的通解为:

(ⅰ) $y(x)=AI_n(x)+BI_{-n}(x)$ $\quad(n\neq$ 整数)

(ⅱ) $y(x)=AI_n(x)+Bk_n(x)$ $\quad(n$ 为任意数)

5.2 基本要求

(1) 掌握第一类贝塞尔函数级数形式的表达式。

(2) 掌握贝塞尔方程的通解形式。

(3) 能熟练运用贝塞尔函数的递推公式计算积分。

(4) 掌握贝塞尔函数系的正交性,会将函数展成贝塞尔函数的级数。

5.3 例题分析

1.含 $J_m(x)$ 的积分计算问题

解题思路:遇到这种积分,一般要利用分部积分法结合递推公式去计算,灵活运用递推公式是解题的关键。

例 5-1 求 $\int xJ_2(x)\mathrm{d}x$。

解 在式(5.2)中取 $n=1$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-1}J_1(x)]=-x^{-1}J_2(x)$$

由分部积分法得

$$\int xJ_2(x)\mathrm{d}x=-\int x^2\mathrm{d}[x^{-1}J_1(x)]=$$

$$-x^2[x^{-1}J_1(x)]+2\int x\cdot x^{-1}J_1(x)\mathrm{d}x=$$

$$-xJ_1(x)+2\int J_1(x)\mathrm{d}x=$$

$$-xJ_1(x)-2J_0(x)+C$$

其中用到了式(5.3)。

例 5－2　**求** $\int x^4 J_1(x)\mathrm{d}x$。

解　**解法** 1　**由**(5.1) **式及分部积分法得**

$$\int x^4 J_1(x)\mathrm{d}x=\int x^2\cdot x^2 J_1(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}[x^2 J_2(x)]=$$

$$x^2\cdot x^2 J_2(x)-2\int x\cdot x^2 J_2(x)\mathrm{d}x=$$

$$x^4 J_2(x)-2\int x^3 J_2(x)\mathrm{d}x=$$

$$x^4 J_2(x)-2x^3 J_3(x)+C$$

又由(5.4) **式得**

$$J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)-J_1(x)\qquad J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$$

进而得:

$$\int x^4 J_1(x)\mathrm{d}x=x^2(8-x^2)J_0(x)+4x(x^2-4)J_1(x)+C$$

解法 2　**由式**(5.3), **式**(5.1) **及分部积分法得**

$$\int x^4 J_1(x)\mathrm{d}x=-\int x^4\mathrm{d}[J_0(x)]=-x^4 J_0(x)+4\int x^3 J_0(x)\mathrm{d}x=$$

$$-x^4 J_0(x)+4\int x^2\mathrm{d}[xJ_1(x)]=$$

$$-x^4 J_0(x)+4x^3 J_1(x)-8\int x^2 J_1(x)\mathrm{d}x=$$

$$-x^4 J_0(x)+4x^3 J_1(x)-8x^2 J_2(x)+C$$

又由式(5.4) **得**

$$J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\tag{5.9}$$

将式(5.9)**代入式**(5.8)**即得结论。**

注:**一般来说,应将计算结果中的贝塞尔函数的阶数尽量化为零阶、一阶的,因为在工程上有零阶,一阶贝塞尔函数表可查。**

例 5-3　**计算**$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_1(bx)\mathrm{d}x$　　$(a>0, a$ **及** b **为实数**)。

解　**利用公式**$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_0(bx)] = -bJ_1(bx)$ **及分部积分法得**

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_1(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\int_0^{\infty} J_0(bx)e^{-ax}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{b} - \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$\frac{1}{b}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

* **例 5-4**　**计算** $I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\mathrm{d}x$　$(a>0, a$**及** b **为实数**)。

解　**解法** 1　**利用** $J_0(x)$ **的积分表示式**:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-ax}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(bx\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\left[\int_0^{\pi}\cos(bx\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{e^{-ax}[-a\cos(bx\cos\varphi)+\cos\varphi\sin(bx\cos\varphi)]_0^{+\infty}}{a^2+b^2}\right]\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2+b^2\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2+b^2\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

令 $\tan\varphi = \frac{t}{2}$,**则**

$$I = \frac{4a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+4(a^2+b^2)} = \frac{4}{a\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left[\frac{2}{a}\sqrt{a^2+b^2}\right]^2} =$$

$$\frac{2}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left[\arctan\frac{at}{2\sqrt{a^2+b^2}}\Bigg|_0^{+\infty}\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

解法 2　**利用** $J_0(x)$ **的积分表示式**:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx\int_0^{2\pi} e^{ibx\sin\phi}\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\infty} e^{(-a+ib\sin\phi)x}\,dx$$

因为上述无穷级数绝对收敛,且对 ϕ是一致收敛的,所以可以交换积分次序。得

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{a - ib\sin\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a + ib\sin\phi}{a^2 + b^2\sin^2\phi}d\phi =$$

$$\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{a^2 + b^2\sin^2\phi}$$

令 $z = e^{i\phi}$,则

$$I = \frac{a}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a^2 + b^2\dfrac{z^2 - 2 + z^{-2}}{-4}}\frac{1}{iz}dz =$$

$$-\frac{2a}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{b^2z^4 - (4a^2 + 2b^2)z^2 + b^2}dz =$$

$$-\frac{2a}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z}{[bz^2 - 2az - b][bz^2 + 2az - b]}dz$$

记被积函数为 $f(z)$,显然奇点

$$z_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b},\quad z_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

$$z_3 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b},\quad z_4 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$$

均为一级极点,由留数定理得

$$I = -4a\sum_{i=1}^{4}\mathrm{Res}[f(z), z_i] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例 5-5　试证加法公式: $J_m(x + y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{m-k}(y)$,其中 m为整数。

证　由贝塞尔函数母函数的表示式知

$$e^{\frac{x+y}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(x + y)z^l$$

$$e^{\frac{y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(y)z^n$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)z^k$$

又

$$e^{\frac{x+y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot e^{\frac{y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

得

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(x+y)z^l=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(y)z^n\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)z^k\right]=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_n(y)J_k(x)\right]z^{n+k}$$

令 $n+k=m$,得

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(x+y)z^l=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{m-k}(y)J_k(x)\right]z^m$$

所以得

$$J_m(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{m-k}(y)$$

2.函数沿贝塞尔级数展开的问题

解题思路:利用贝塞尔函数系的正交完全性,关键在于计算展开系数,计算中注意结合递推公式。

例 5-6 将函数 $f(x)=1$ 在 $[0,1]$ 上展开成贝塞尔函数 $J_0(\mu_k x)$ 的级数,其中 μ_k 为 $J_0(x)$ 的正零点。

解 设 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_0(\mu_k x)$,利用函数系 $\{J_0(\mu_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上的带权正交性得

$$C_k=\frac{2\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\,\mathrm{d}x}{J_1^2(\mu_k)}$$

由递推公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$,计算积分:

$$\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(\mu_k)^2}\int_0^1 (\mu_k x)J_0(\mu_k x)\mathrm{d}(\mu_k x) =$$

$$\frac{1}{(\mu_k)^2}\int_0^1 d[(\mu_k x)J_1(\mu_k x)] = \frac{1}{\mu_k}J_1(\mu_k)$$

因此

$$C_k = \frac{2}{\mu_k J_1(\mu_k)}$$

得展开式为

$$f(x) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_k J_1(\mu_k)}J_0(\mu_k x)$$

3.贝塞尔函数的应用

解题思路:这部分题目把极坐标和柱坐标系下的分离变量法和贝塞尔方程的求解,贝塞尔函数的性质结合了起来,解决问题的关键仍是灵活运用贝塞尔函数的性质。

例 5-7　设有半径为 1 的薄均匀圆盘,边界上的温度为零,初始时刻圆盘内温度分布为 $1-x^2-y^2$,侧面绝缘,求圆盘内瞬时温度分布。

解　由于在圆域内求解问题,采用极坐标系较为简便,而且考虑到初始条件和 θ 无关,所以温度 u 只是 r 和 t 的函数,定解问题可描述为

$$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) \quad (0 \le r < 1) \tag{5.10}$$

$$u|_{r=1} = 0 \tag{5.11}$$

$$u|_{t=0} = 1 - r^2 \tag{5.12}$$

引入自然边界条件

$$|u(0,\varphi)| < \infty \tag{5.13}$$

$$\lim_{t\to\infty} u = 0 \tag{5.14}$$

用分离变量法求解,令:

$$u(r,t) = F(r)T(t)$$

代入式(5.10)得

$$FT' = a^2\left(F'' + \frac{1}{r}F'\right)T$$

即

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{F'' + \frac{1}{r}F'}{F} \xlongequal{\text{def}} -\lambda$$

得

$$r^2 F'' + rF' + \lambda r^2 F = 0 \tag{5.15}$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \tag{5.16}$$

解式(5.16)得

$$T(t) = b\mathrm{e}^{-a^2\lambda t}$$

由解的有界性,即条件式(5.14)知 λ 只能大于零

令 $\lambda = \beta^2$,则

$$T(t) = b\mathrm{e}^{-a^2\beta^2 t}$$

式(5.15)的通解为

$$F(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r)$$

因 $\lim\limits_{r\to 0} Y_0(\beta r) \to \infty$,由 $u(r, t)$ 的有界性知 $C_2 = 0$,即

$$F(r) = C_1 J_0(\beta r)$$

由式(5.11)得:

$$J_0(\beta) = 0$$

以 $\mu_n^{(0)}$ 记 $J_0(x)$ 的正零点,则

$$\beta_n = \mu_n^{(0)} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

所以

$$F_n(r) = C_n J_0(\mu_n^{(0)} r)$$

$$T_n(t) = b_n \mathrm{e}^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t}$$

得一系列特解

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t} J_0(\mu_n^{(0)} r)$$

由式(5.12)得

$$1 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_n^{(0)} r)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\mu_n^{(0)})}\left[\int_0^1 rJ_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}r - \int_0^1 r^3 J_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}r\right]$$

计算知

$$\int_0^1 vJ_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}r = \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\int_0^1 \mu_n^{(0)} rJ_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}(\mu_n^{(0)} r) =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\int_0^1 \mathrm{d}[\mu_n^{(0)} rJ_1(\mu_n^{(0)} r)] = \frac{1}{\mu_n^{(0)}} J_0(\mu_n^{(0)})$$

$$\int_0^1 r^3 J_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}r =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\int_0^1 r^2(\mu_n^{(0)} r) J_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}(\mu_n^{(0)} r) =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\left[r^2 \mu_n^{(0)} rJ_1(\mu_n^{(0)} r)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 r\mu_n^{(0)} rJ_1(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}r\right] =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\left[\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) - \frac{2}{(\mu_n^{(0)})^2}\int_0^1 (\mu_n^{(0)} r)^2 J_1(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{d}(\mu_n^{(0)} r)\right] =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}\left[\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) - \frac{2}{(\mu_n^{(0)})^2}(\mu_n^{(0)} r)^2 J_2(\mu_n^{(0)} r)\Big|_0^1\right] =$$

$$\frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2}[\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) - 2J_2(\mu_n^{(0)})]$$

进而得

$$C_n = \frac{4J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})}$$

故所求定解问题的解为

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} J_0(\mu_n^{(0)} r)\mathrm{e}^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t}$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的正零点。

例5－8　半径为 a，高为 h 的均匀圆柱，下底侧面保持零度，上底温度分布为 $f(\rho) = \rho^2$，求圆柱体内的稳恒的温度分布。

解　稳定温度分布 u 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$，因为求解区域

是圆柱体,故采用柱坐标,极点取在下底的中心, z 轴为圆柱的轴,结合柱坐标系下的拉普拉斯算式的表达式,又初始温度分布只和极径有关,知 u 和 φ 无关定解问题可写为:

$$\begin{cases} u_{zz} = -\left(u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_{\rho}\right) \quad (0 < \rho < a, 0 < z < h) & (5.17) \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = \rho^2 & (5.18) \\ u|_{\rho=a} = 0 & (5.19) \end{cases}$$

引入自然边界条件

$$|u_{\rho=0}| < \infty \tag{5.20}$$

令 $u(z,\rho) = Z(z)R(\rho)$,代入式(5.10)得

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R(\rho)}{R(\rho)} \xlongequal{\text{def}} -\lambda$$

即

$$z''(z) - \lambda z(z) = 0 \tag{5.21}$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \lambda R(\rho) = 0 \tag{5.22}$$

现对 λ 取值讨论如下:

(i) 若 $\lambda < 0$ 时,则式(5.22)为零阶变形的贝塞尔方程,通解为

$$R(\rho) = C_1 I_0(\sqrt{-\lambda}p) + C_2 k_0(\sqrt{-\lambda}\rho)$$

当 $\rho \to 0$ 时: $k_0(\sqrt{-\lambda}\rho) \to \infty$ 由式(5.20)知: $C_2 = 0$

即式(5.22)的解为

$$R(\rho) = C_1 I_0(\sqrt{-\lambda}\rho)$$

又由式(5.19)得

$$R(a) = 0$$

所以

$$I_0(\sqrt{-\lambda}a) = 0$$

又由变形的贝塞尔函数没有实的零点,故应排除 $\lambda < 0$ 的情况。

(ii) 若 $\lambda = 0$ 时,式(5.22)的通解为

$$R(\rho) = C_1 + C_2 \ln\rho$$

和式(5.20)矛盾,排除该情况。

(iii) $\lambda>0$ 时,式(5.22)为零阶贝塞尔方程,令 $\lambda=\beta^2$,则通解为

$$R(\rho)=cJ_0(\beta\rho)+dY_0(\beta\rho)$$

由 $|\,u|_{\rho=0}\,|<\infty$ 知,$d=0$,所以

$$R(\rho)=cJ_0(\beta\rho) \tag{5.23}$$

由 $u|_{\rho=a}=0$ 得

$$R(a)=0$$

所以　$cJ_0(\beta a)=0$

c 不能为零,须有

$$J_0(\beta a)=0$$

得一系列 β 值

$$\beta_n=\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的零点。

代入式(5.22),得

$$R_n(\rho)=C_nJ_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)$$

将 $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\right)^2$ 代入式(5.20),得

$$Z_n(z)=a_n\mathrm{e}^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}+b_n\mathrm{e}^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}$$

得一系列特解

$$u_n(z,\rho)=\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)$$

其中　$A_n=a_nc_n$, $B_n=b_nc_n$,叠加后得

$$u(z,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) \tag{5.24}$$

由式(5.18)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)=0 \tag{5.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}+B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)=\rho^2 \tag{5.26}$$

利用函数系$\left\{J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ **在**$[0,a]$ **上的带权正交性**:

$$\int_0^a \rho J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)d\rho=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ \frac{a^2}{2}J_0^2(\mu_n) & (n=m)\end{cases}$$

(**证明参阅** 5.4 **第** 14 **题**)

得

$$A_n+B_n=0 \tag{5.27}$$

$$A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}+B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}=\frac{\int_0^a \rho^3 J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)d\rho}{\frac{a^2}{a}J_0^2(\mu_n^{(0)})} \tag{5.28}$$

因

$$\int x^3 J_0(x)dx=\int x^2 d[xJ_1(x)]=x^2\cdot x\cdot J_1(x)-2\int x^2 J_1(x)dx=$$
$$x^3 J_1(x)-2x^2 J_2(x)$$

易知

$$\int_0^a \rho^3 J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)d\rho=\frac{a^4}{(\mu_n^{(0)})^4}\int_0^{\mu^{(0)}} x^3 J_0(x)dx=$$
$$\frac{a^4}{\mu_n^{(0)}}J_1(\mu_n^{(0)})-\frac{2a^4}{(\mu_n^{(0)})^2}J_2(\mu_n^{(0)}) \tag{5.29}$$

又由式(5.4) **知**

$$J_2(\mu_n^{(0)})=\frac{2}{\mu_n^{(0)}}J_1(\mu_n^{(0)})$$

代入式(5.29),**得**

$$\int_0^a \rho^3 J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)d\rho=\frac{a^4}{\mu_n^{(0)}}J_1(\mu_n^{(0)})-\frac{4a^4}{(\mu_n^{(0)})^3}J_1(\mu_n^{(0)}) \tag{5.30}$$

将式(5.30) **代入式**(5.28) **和式**(5.27) **联立得**

$$A_n=-B_n=\frac{a^2}{\mu_n^{(0)}J_1(\mu_n^{(0)})\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h\right)}\left(1-\frac{4}{\mu_n^{(0)}}\right)$$

代入式(5.24)得解为

$$u(z,\rho)=2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right)\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z\right)}{\mu_n^{(0)}J_1(\mu_n^{(0)})\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h\right)}\left(1-\frac{4}{\mu_n^{(0)}}\right)$$

例 5－9　**设有半径为 R 且边缘固定的圆形薄膜,每单位面积上作用的周期力为 $f=A\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)\sin wt$,试求该膜的稳恒振动规律。**

解　由于薄膜是在周期力 f 的长期作用下的稳恒振动,这就相当一个没有初始条件的问题,设膜的面密度为 σ,振动过程可视为对称振动,即与变量 φ 无关,事实上解问题可写为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right)=\frac{A}{\sigma}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)\sin wt & (0\leq\rho<R)\\ u|_{\rho=R}=0\end{cases}$$

引入自然边界条件

$$|u|_{\rho\to0}|<\infty$$

这里薄膜的振动看作完全是由周期力引起的,许多周期之后,当然可以认为薄膜的稳恒振动周期与周期力 f 的周期相同,采用分离变量法,设解为

$$u(\rho,t)=v(\rho)\sin wt$$

代入方程与定解条件得

$$\begin{cases}v_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}v_\rho+\frac{w^2}{a^2}v=-\frac{A}{\sigma a^2}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right) & (5.31)\\ v(R)=0\,(|v(0)|<\infty) & (5.32)\end{cases}$$

对应的齐次方程是零阶贝塞尔方程,其通解为

$$v'(\rho)=B_1J_0\left(\frac{w}{a}\rho\right)+B_2Y_0\left(\frac{w}{a}\rho\right)$$

由 $|v(0)|<\infty$ 知必有 $|v'(0)|<\infty$,进而 $B_2=0$ 即

$$v'(\rho)=B_1J_0\left(\frac{w}{a}\rho\right)$$

现求式(5.24)的一特解,设特解形式为

$$\bar{v}(\rho) = C\rho^2 + D\rho + E$$

代入式(5.24),得

$$2C + \frac{1}{\rho}\cdot 2C\rho + \frac{1}{\rho}D + \frac{w^2}{a^2}(C\rho^2 + D\rho + E) = -\frac{A}{a^2\sigma}\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

比较 ρ 的同次幂的系数,得

$$C = \frac{A}{w^2 R^2 \sigma},\ D = 0,\ E = -\frac{4\sigma^2 A}{w^4 R^2 \sigma} - \frac{A}{w^2 \sigma}$$

从而

$$\bar{v}(\rho) = \frac{A}{w^2 R^2 \sigma} - \frac{4\sigma^2 A}{w^4 R^2 \sigma} - \frac{A}{w^2 \sigma}$$

于是式(5.31)的通解为

$$v(\rho) = B_1 J_0\left(\frac{w}{a}\rho\right) + \frac{A}{w^2 R^2 \sigma}\rho^2 - \frac{4\sigma^2 A}{w^4 R^2 \sigma} - \frac{A}{w^2 \sigma}$$

由边界条件 $v(R) = 0$ 得

$$B_1 = \frac{4a^2 A}{w^4 R^2 \sigma J_0\left(\frac{w}{a}R\right)}$$

所以膜的稳态振动为

$$u(\rho, t) = \left\{\frac{4a^2 A}{w^4 R^2 \sigma}\left[\frac{J_0\left(\frac{w}{a}\rho\right)}{J_0\left(\frac{w}{a}R\right)} - 1\right] + \frac{A}{w^2 \sigma}\left(\frac{\rho^2}{R^2} - 1\right)\right\}\sin wt$$

5.4 习题全解

1. 当 n 为正整数时,讨论 $J_n(x)$ 的收敛范围。

解 当 n 为正整数时:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}$$

对取定 x,级数通项为:

$$a_m = (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m!(n+m)!}$$

计算得

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|=0$$

由达朗贝尔判别法知该级数在整个数轴上收敛。

2. 写出 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_n(x)$(n 是正整数)的级数表示式的前 5 项。

解　由贝塞尔函数的级数表示式知当 n 为整数时:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

特别地

$$J_1(x)=\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7+$$

$$\frac{1}{4!5!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\cdots$$

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^8+\cdots$$

3. 证明 $J_{2n-1}(0)=0$,其中 $n=1,2,3,\cdots$

证　$$J_{2n-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(2n+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k-1}$$

不含常数项,所以 $J_{2n-1}(0)=0$

4. $\dfrac{d}{dx}J_0(\alpha x)=?$

解　$$\frac{d}{dx}J_0(\alpha x)\ \frac{d}{d(\alpha x)}J_0(\alpha x)=-\alpha J_1(\alpha x)$$

5. $\dfrac{d}{dx}[xJ_1(\alpha x)]=?$

解　$$\frac{d}{dx}[xJ_1(\alpha x)]=\frac{d}{d(\alpha x)}[x_1\ J_1(\alpha x)]\frac{d(\alpha x)}{dx}=$$

$$\frac{d}{d(\alpha x)}[\alpha xJ_1(\alpha x)]=\alpha xJ_0(\alpha x)$$

6. **证明** $y = J_n(\alpha x)$ **为方程**
$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - n^2) y = 0$ **的解。**

证　方法 1 由第二组递推公式(5.4),**式**(5.5) **得**

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$J'_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)$$

所以

$$y' = J'_n(\alpha x) = \alpha \frac{\mathrm{d} J_n(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)} = \alpha\left[-J_{n+1}(\alpha x) + \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x)\right] =$$

$$-\alpha J_{n+1}(\alpha x) + \frac{n}{x} J_n(\alpha x)$$

$$y'' = -\alpha J'_{n+1}(\alpha x) - \frac{n}{x^2} J_n(\alpha x) + \frac{n}{x} J'_n(\alpha x)$$

又

$$J'_{n+1}(\alpha x) = \alpha \frac{\mathrm{d} J_{n+1}(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)} = \alpha\left[J_n(\alpha x) - \frac{n+1}{\alpha x} J_{n+1}(\alpha x)\right] =$$

$$\alpha J_n(\alpha x) - \frac{n+1}{x} J_{n+1}(\alpha x)$$

所以

$$y'' = -\alpha^2 J_n(\alpha x) + \frac{\alpha(n+1)}{x} J_{n+1}(\alpha x) - \frac{n}{x^2} J_n(\alpha x) +$$

$$\frac{n}{x}\left[-\alpha J_{n+1}(\alpha x) + \frac{n}{x} J_n(\alpha x)\right] =$$

$$-\alpha^2 J_n(\alpha x) + \frac{\alpha(n+1)}{x} J_{n+1}(\alpha x) - \frac{n}{x^2} J_n(\alpha x) -$$

$$\frac{\alpha n}{x} J_{n+1}(\alpha x) + \frac{n^2}{x^2} J_n(\alpha x) =$$

$$-\alpha^2 J_n(\alpha x) + \frac{\alpha}{x} J_{n+1}(\alpha x)$$

代入即得

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - n^2 y) = 0$$

方法2 因 $y' = \alpha J'_n(\alpha x)$, $y'' = \alpha^2 J''_n(\alpha x)$，由 $J_n(x)$ 是 n 阶贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

的特解，得

$$(\alpha x)^2 J''_n(\alpha x) + (\alpha x) J'_n(\alpha x) + [(\alpha x)^2 - n^2] J_n(\alpha x) = 0$$

7. 证明

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)\sin(x - \pi) + \frac{3}{\pi}\cos(x - \pi)\right]$$

解 先计算 $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$，因

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m}$$

又

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{3}{2} + m - 1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}{2^{m+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}$$

所以

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+1)!\sqrt{\pi}}\frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

同理可得 $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

由递推公式(5.4)得

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{1}{x}\sin x\right)=$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

一般地,**在式**(5.7)**中取** $n=\frac{1}{2}$ **得**

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right]^m\left[\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right]=(-1)^m\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(x)}{x^{m+\frac{1}{2}}}$$

即

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^m x^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m\left[\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{2m+1}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^m\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

取 $m=2$,**即得**

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\left[\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right]=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3-x^2}{x^2}\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right)=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right]$$

8. **试证**　$y=x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)$ **是方程**

$$x^2y''+(x^2-2)y=0$$

的一个解。

证　**因** $y=x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)$,**易知**

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)+$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{1}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)+x^{-\frac{1}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}(x)$$

所以

$$x^2y''+(x^2-2)y=x^{\frac{5}{2}}J''_{\frac{3}{2}}(x)+x^{\frac{3}{2}}J'_{\frac{3}{2}}(x)-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)+$$

$$(x^2-2)x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}[x^2J''_{\frac{3}{2}}(x)+xJ'_{\frac{3}{2}}(x)+$$

$$(x^2-\frac{9}{4})J_{\frac{3}{2}}(x)]$$

因 $J_{\frac{3}{2}}(x)$ **满足**$\frac{3}{2}$**阶贝塞尔方程,即得结论成立。**

9. **试证**　$y=xJ_n(x)$ **是方程**

$x^2y''-xy'+(1+x^2-n^2)y=0$ **的一个解。**

证　**容易计算得**

$$y'=J_n(x)+xJ'_n(x)$$

$$y''=2J'_n(x)+xJ''_n(x)$$

所以

$$x^2y''-xy'+(1+x^2-n^2)y=$$

$$x^3J''_n(x)+2x^2J'_n(x)-xJ_n(x)-x^2J'_n(x)+$$

$$(1+x^2-n^2)xJ_n(x)=$$

$$x[x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)]=0$$

结论得证。

10. **设** $\lambda_i(i=1,2,3,\cdots)$ **是方程** $J_1(x)=0$ **的正根,将函数**

$$f(x)=x\qquad(0<x<1)$$

展开成贝塞尔函数 $J_1(\lambda_i x)$ **的级数。**

解　**设** $f(x)=x=\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_1(\lambda_i x)$

利用函数系$\{J_1(\lambda_i x)\}_{i=1}^{\infty}$ **在**$[0,1]$ **上的带权正交性得**

$$A_i = \frac{1}{\frac{1}{2}J_0^2(\lambda_i)}\int_0^1 xf(x)J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x$$

由式(5.1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x)$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 J_1(\lambda_i x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{(\lambda_i)^3}\int_0^1 \mathrm{d}[(\lambda_i x)^2 J_2(\lambda_i x)] = \frac{1}{\lambda_i}J_2(\lambda_i)$$

在式(5.4)中取 $n = 1$,令 $x = \lambda_i$,得

$$J_2(\lambda_i) = -J_0(\lambda_i)$$

所以

$$A_i = \frac{2}{J_0^2(\lambda_i)}\frac{1}{\lambda_i}J_2(\lambda_i) = -\frac{2}{\lambda_i J_0(\lambda_i)}$$

即

$$x = \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\lambda_i J_0(\lambda_i)}\right)J_1(\lambda_i x) \qquad (0 < x < 1)$$

11. 设 $\alpha_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 是 $J_0(x) = 0$ 的正根,将函数 $f(x) = x^2(0 < x < 1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_0(\alpha x)$ 的级数。

解 设 $x^2 = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_i x)$

利用函数系 $\{J_0(\alpha_i x)\}_{i=1}^{\infty}$ 在[0,1]上的正交性得

$$A_i = \frac{2\int_0^1 x^3 J_0(\alpha x)\mathrm{d}x}{J_1^2(\alpha)}$$

在式(5.1)中分别取 $n = 1, n = 2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(x)] = xJ_0(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x)$$

由分部积分得

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(\alpha_i)^2}\int_0^1 x^2 \alpha_i x J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}(\alpha_i x) =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}\left[\alpha_i J_1(\alpha_i) - 2\int_0^1 x\alpha_i x J_1(\alpha_i x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}\left[\alpha_i J_1(\alpha_i) - \frac{2}{(\alpha_i)^2}\int_0^1 (\alpha_i x)^2 J_1(\alpha_i x)\mathrm{d}(\alpha_i x)\right] =$$

$$\frac{1}{(\alpha_i)^2}\left[\alpha_i J_1(\alpha_i) - 2J_2(\alpha_i)\right]$$

在式(5.4)中取 $n = 1$ 得

$$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x}J_1(x)$$

所以 $J_2(\alpha_i) = \frac{2}{\alpha_i}J_1(\alpha_i)$,进而得

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha_i}\left(1 - \frac{4}{(\alpha_i)^2}\right)J_1(\alpha_i)$$

即

$$A_i = \frac{2}{\alpha_i J_1(\alpha_i)}\left(1 - \frac{4}{(\alpha_i)^2}\right)$$

12. 设 $\alpha_i(i = 1,2,\cdots)$ 是方程 $J_0(2x) = 0$ 的正根,将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1) \\ 0 & (1 < x < 2) \end{cases}$$

展开成贝塞尔函数 $J_0(\alpha_i x)$ 的级数。

解　因 $J_0(2\alpha_i) = 0$,知 $2\alpha_i$ 为 $J_0(x)$ 的零点。

又因

$$\int_0^2 xJ_0(\alpha_i x)J_0(\alpha_j x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 2J_1^2(2\alpha_i) & (i = j) \end{cases}$$

设　$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\alpha_i x)$$

同乘以 $xJ_0(\alpha_j x)$ 在[0,2]上积分得

$$A_i = \frac{1}{2J_1^2(2\alpha_i)}\int_0^2 xf(x)J_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2J_1^2(2\alpha_i)}\int_0^1 xJ_0(\alpha_i x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2J_1^2(2\alpha_i)}\frac{1}{(\alpha_i)^2}\int_0^1 \mathrm{d}[\alpha_i xJ_1(\alpha_i x)] =$$

$$\frac{J_1(\alpha_i)}{2\alpha_i J_1^2(2\alpha_i)}$$

于是所求展式为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_i)}{2\alpha_i J_1^2(2\alpha_i)}J_0(\alpha_i x)$$

13. **把定义在$[0, a]$上的函数展开成贝塞尔函数 $J_0(\frac{\alpha_i x}{a})$ 的级数，其中 α_i 是 $J_0(x)$ 正零点。**

解 设 $f(x)$ 定义在$[0, a]$上，且

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\frac{\alpha_i x}{a})$$

由函数系$\{J_0(\frac{\alpha_i x}{a})\}_{i=1}^{\infty}$在$[0, a]$上的正交性，类似于 12 题有

$$A_i = \frac{\int_0^a xf(x)J_0(\frac{\alpha_i}{R}x)\mathrm{d}x}{\frac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_i)}$$

即得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\int_0^a xf(x)J_0(\frac{\alpha_i}{R}x)\mathrm{d}x}{a^2 J_1^2(\alpha_i)}$$

14. **若 $\lambda_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 是 $J_1(x)$ 正零点，证明：**

$$\int_0^R xJ_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\lambda_i) & (i = j)\end{cases}$$

证

$$\int_0^R xJ_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2\int_0^R(\frac{\lambda_j}{R}x)J_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_0(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2[J_0(\frac{\lambda_i}{R}x)(\frac{\lambda_j}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\Big|_0^R - \int_0^R\frac{\lambda_j}{R}xJ'_0(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x] =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2[\lambda_j J_0(\lambda_i)J_1(\lambda_j) + \int_0^R\frac{\lambda_i\lambda_j}{R^2}xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x] =$$

$$(\frac{R}{\lambda_j})^2\frac{\lambda_i\lambda_j}{R^2}\int_0^R xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_j}{R}x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\int_0^R xJ_1(\frac{\lambda_i}{R}x)J_1(\frac{\lambda_i}{R}x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\lambda_i) & (i = j) \end{cases}$$

15. **利用递推公式证明**:

(1) $J_2(x) = J''_0(x) - \frac{1}{x}J'_0(x)$

(2) $J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J_0(x) = 0$

证　(1) **由式**(5.3) **知**

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

由式(5.4),**式**(5.5) **得**

$$J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

令 $n = 1$,**得**

$$J'_1(x) = \frac{1}{x}J_1(x) - J_2(x)$$

所以

$$J''_0(x) - \frac{1}{x}J'_0(x) = -J'_1(x) + \frac{1}{x}J_1(x) =$$

$$-\frac{1}{x}J_1(x) + J_2(x) + \frac{1}{x}J_1(x) = J_2(x)$$

注:**当然也可用下法求** $J'_1(x)$:

$$J'_1(x) = (x \cdot x^{-1} J_1(x)) = x^{-1} J_1(x) - x \cdot x^{-1} J_2(x) =$$

$$\frac{1}{x} J_1(x) - J_2(x)$$

(2) **由**(1) **及式**(5.4) **得**

$$J_2(x) = J''_0(x) + \frac{1}{x} J_1(x) = J''_0(x) + \frac{J_0(x) + J_2(x)}{2}$$

即 $$J_2(x) = 2J''_0(x) + J_0(x)$$

求导得 $$J'_2(x) = 2J_0(x) + J'_0(x)$$

在式(5.5) **中取** $n = 2$,**得**

$$J_3(x) = -2J'_2(x) + J_1(x) =$$

$$-4J_0(x) - 3J'_0(x)$$

注:也可采用下法证得。

由式(5.5) **得**

$$J_3(x) = -2J'_2(x) + J_1(x) = -2J'_2(x) - J'_0(x)$$

又 $$J_2(x) = J_0(x) - 2J'_1(x)$$

求导得 $$J'_2(x) = J'_0(x) - 2J_0(x)$$

代入式(5.8) **即得**

$$J_3(x) = -4J_0(x) - 3J'_0(x)$$

16. **试证**

$$\int x^n J_0(x)\mathrm{d}x = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) -$$

$$(n-1)^2 \int x^{n-2} J_0(x)\mathrm{d}x$$

证 **由式**(5.1) **及分部积分得**

$$\int x^n J_0(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1} xJ_0(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1}\mathrm{d}(xJ_1(x)) =$$

$$x^n J_1(x) - (n-1)\int x^{n-1} J_1(x)\mathrm{d}x =$$

$$x^n J_1(x) + (n-1)\int x^{n-1}\mathrm{d}(J_0(x)) =$$

$$x^n J_1(x) + (n-1)[x^{n-1} J_0(x) -$$

$$(n-1)\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x] =$$

$$x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-$$

$$(n-1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$$

结论得证。

17. **试解下列圆柱区域的边值问题:在圆柱内**$\nabla^2 u=0$,**在圆柱侧面** $u|_{\rho=a}=0$,**在下底** $u|_{z=0}=0$,**在上底** $u|_{z=h}=A$。

解　定解问题为

$$\begin{cases} u_{zz}=-\left(u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho\right) \quad (0<\rho<a,\ 0<z<h) & (1)\\ u|_{\rho=a}=0 & (2)\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=h}=A & (3)\end{cases}$$

引入自然边界条件　$|u(z,0)|<+\infty$　(4)

令 $u(z,\rho)=G(z)R(\rho)$,**代入**(1) **式得**

$$-\frac{G''(z)}{G(z)}=\frac{R''(\rho)+\dfrac{1}{\rho}R(\rho)}{R(\rho)}\xlongequal{\text{def}}-\lambda$$

得

$$G''(z)-\lambda G(z)=0 \quad (5)$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\lambda\rho^2R(\rho)=0 \quad (6)$$

令 $\lambda=\beta^2$(**对** λ**的讨论参见例** 5－8),**则**

$$R(\rho)=C_1J_0(\beta\rho)+C_2Y_0(\beta\rho)$$

由式(4) **知**

$$C_2=0$$

所以

$$R(\rho)=C_1J_0(\beta\rho)$$

由式(2) **得**

$$R(a)=0$$

所以

$$C_1J_0(\beta a)=0$$

因 C**不能为零,所以得一系列的** β**值**:

$$\beta a_n=\mu_n^{(0)} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的零点,即

$$\beta_n = \frac{\mu_n^{(0)}}{a}, R_n(\rho) = C_n J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

将 $\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\right)^2$ 代入式(5)得

$$G_n(z) = a_n e^{\frac{\mu_n}{a}z} + b_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}$$

得一系列特解,叠加后得

$$u(z, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)$$

由式(3)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right) = A$$

所以利用 14 题结论得

$$A_n + B_n = 0$$

$$A_n e^{\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} + B_n e^{-\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h} = \frac{2\int_0^a A r J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}r\right)\mathrm{d}r}{a^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} =$$

$$\frac{2A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})}$$

联立得

$$A_n = -B_n = \frac{A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h\right)}$$

所以原定解问题的解为

$$u(z, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}h\right)}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}z\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{a}\rho\right)$$

18. 解下列定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) & (1) \\ u\big|_{t=0} = 1 - \dfrac{\rho^2}{R^2}, \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0 & (2) \\ u\big|_{\rho=0} < \infty, u\big|_{\rho=R} = 0 & (3) \end{cases}$$

若上述方程换成非齐次的,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -B \quad (B\text{ 为常数}) \tag{4}$$

而所有定解条件均为零,试求其解。

解　(一) 解式(1) ～ (3)

设 $u(\rho, t) = F(\rho)T(t)$,代入式(1) 得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{F''(\rho) + \frac{1}{\rho}F'(\rho)}{F(\rho)} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} -\lambda$$

由此得

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{5}$$

$$\rho^2 F''(\rho) + \rho F'(\rho) + \lambda\rho^2 F(\rho) = 0 \tag{6}$$

令 $\lambda = \beta^2$(对 λ 的讨论见例 5 − 8),则

$$F(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho) + C_2 Y_0(\beta\rho)$$

由 $u\big|_{\rho=0} < \infty$ 知 $C_2 = 0$,即

$$F(\rho) = C_1 J_0(\beta\rho)$$

由 $u\big|_{\rho=R} = 0$ 知

$$C_1 J_0(\beta R) = 0$$

C_1 不为零,所以

$$\beta R = \mu_n^{(0)}$$

得一系列的 β 值

$$\beta_n = \frac{\mu_n^{(0)}}{R} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $\mu_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的零点。显见

$$F_n(\rho) = C_n J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

将 $\lambda_n = \beta_n^2 = (\frac{\mu_n^{(0)}}{R})^2$ **代入式**(5) **得**

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t + b_n \sin \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t$$

得一系列特解

$$u_n(\rho, t) = \left(A_n \cos \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t + B_n \sin \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

叠加后得

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t + B_n \sin \frac{a\mu_n^{(0)} t}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

由式(2) **得**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right) = 1 - \frac{\rho^2}{R^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right) = 0$$

利用前文第 14 **题结论,得**

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2\int_0^R \rho\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right) d\rho}{R^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} = \frac{2\,\frac{4R^2}{(\mu_n^{(0)})^3} J_1(\mu_n^{(0)})}{R^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} =$$

$$\frac{8}{(\mu_n^{(0)})^3 J_1(\mu_n^{(0)})}$$

所以原定解问题的解为

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 J_1(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^3} \cos \frac{a\mu_n^{(0)}}{R} t J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

(二) **解方程是非齐次的,其定解问题为**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -B & (7) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 & (8) \\ u|_{\rho=0} < \infty, \quad u|_{\rho=R} = 0 & (9) \end{cases}$$

方法 1　**注意到方程有不依赖于** t **的非齐次项,设**

$$u(\rho, t) = v(\rho, t) + w(\rho) \tag{10}$$

其中 $w(\rho)$ **满足:**

$$\begin{cases} \rho w''(\rho) + w'(\rho) = -B\rho \\ w(R) = 0 \quad |W(0)| < +\infty \end{cases}$$

解之得
$$w(\rho) = \frac{B}{4}(R^2 - \rho^2)$$

则 $v(\rho, t)$ **满足:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right) & (11) \\ v|_{\rho=0} < \infty \qquad v|_{\rho=R} = 0 & (12) \\ v|_{t=0} = \dfrac{B}{4}(\rho^2 - R^2) \qquad v_t|_{t=0} = 0 & (13) \end{cases}$$

用分离变量法解式(11) ~ (13),**解法法参阅**(一) **得**

$$v(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2BR^2}{[\mu_m^{(0)}]^3 J_1(\mu_m^{(0)})} \cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R} t J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right)$$

所以原定解问题的解为

$$u(\rho, t) = v(\rho, t) + w(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2BR^2}{[\mu_m^{(0)}]^3 J_1(\mu_m^{(0)})} \cos\frac{a\mu_m^{(0)}}{R} t J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right) + \frac{BR^2}{4}\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

方法 2 用固有函数法。由(**一**)**知固有函数系为** $\left\{J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$,**设解为**

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{15}$$

将非齐次项按固有函数系展开为

$$a^2 B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right) \tag{16}$$

其中

$$b_m = \frac{a^2 B}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^R \rho J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right) d\rho = \frac{2a^2 B}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}$$

将式(15),(16) **代入式**(7) **得**

$$T''_m(t) + \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} a\right)^2 T_m(t) = b_m \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{17}$$

将式(15) **代入式**(9) **得**

$$T_m(0) = 0 \quad T'_m(0) = 0 \tag{18}$$

解式(17),(18) **得**

$$T_m(t) = \frac{-2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} \cos \frac{a\mu_m^{(0)}}{R} t + \frac{2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})}$$

代入式(15) **即得原定解问题的解为**

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2BR^2}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} \left(1 - \cos \frac{a\mu_m^{(0)}}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right)$$

注:**将**(14) **式中的函数** $\frac{BR^2}{4}\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$ **按函数系** $\left\{J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\rho\right)\right\}$ **展开**,**即可看出两种做法结论一致。**

19. **证明整数阶贝塞尔函数的母函数为**

$$w(x, t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$$

即 $w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$。

证　利用 e^x **的幂级数展开式**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < +\infty$$

将 $e^{\frac{1}{2}xt}$ **及** $e^{-\frac{x}{2t}}$ **按** t **展开得**

$$e^{\frac{1}{2}xt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}t\right)^j$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2t}\right)^k$$

对任意固定的 x,**这两个级数在** $0 < |t| < \infty$ **内绝对收敛**,**故可作逐**

项相乘,得

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}t\right)^{j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2t}\right)^{k}=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k}}{j!k!t^{j-k}}$$

令 $n=j-k$,则

$$w(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}t^{n}$$

由 $J_n(x)$ 的级数表达式结论证得。

第六章　勒让德多项式

6.1　内容要点

1. 勒让德函数的概念

(1) 勒让德方程的引入：在球坐标系下对拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程进行分离变量，当所研究问题以极轴为对称时就得到 n 阶勒让德方程：

$$(1-x^2)p''(x)-2xp'(x)+n(n+1)p(x)=0$$

(2) 勒让德方程的级数解：

对勒让德方程：$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

其中 n 为任意实数。

对这样的方程，也可以和贝塞尔方程一样用幂级数解法获得。

其通解为：$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$

其中 a_0, a_1 为任意实数，y_1, y_2 为如下的级数：

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^k(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots(n-1)n(n+1)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots \tag{6.1}$$

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^k(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)(n+2)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots \tag{6.2}$$

其中 a_0, a_1 为任意实数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是线性无关的，且分别都是勒让德方程的解，级数(6.1)，(6.2)的收敛半径为1，当 $|x|<1$ 时，级数(6.1)，(6.2)都是绝对收敛的，当 $|x|=1$ 时，它们都是发散的。

(3) 第一类勒让德函数(勒让德多项式)：在式(6.1)，(6.2)中，当 n 是整数时，则 y_1 或者 y_2 便成为多项式，例如 n 是正偶数(或负奇数)时，y_1 是 n 次(或 $-n-1$ 次)多项式，而当 n 是正奇数(或负偶数)时，y_2 是 n 次(或 $-n-1$ 次)多项式。

取 $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}\qquad(n=1,2,\cdots)$

若 n 是正偶数，则

$$y_1 = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}x^{n-2} + \cdots =$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

如果 n 是正奇数，则

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^m\frac{(2n-2m)}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

把这两个多项式写成统一的形式。

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

其中
$$M = \begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

这个多项式称为 n 次的勒让德多项式。

为方便起见，可将 $P_n(x)$ 写成：$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

(4) 第二类勒让德函数：当 n 为整数，$P_n(x)$ 为勒让德方程的一个特解，利用二阶变系数线性微分方程求解方法可找出与 $P_n(x)$ 线性无关的另一个特解。

$$Q_n(x)=P_n(x)\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}$$

它的一般形式为

$$Q_n(x)=P_n(x)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\cdots+$$

$$\sum_{m=1}^{m}\frac{2n-4m+3}{(2m-1)(n-m+1)}P_{n-2m+1}^{(x)}$$

显然,当 $x\to\pm1$ 时, $\ln\frac{1+x}{1-x}\to\infty$,因而 $Q_n(x)$ 在闭区间[-1,1]上无界,通常把 $Q_n(x)$ 称为第二类勒让德函数,它与 $P_n(x)$ 线性无关。

综上所述,对勒让德方程的解可得如下结论,当 n 不是整数时,勒让德方程通解为: $y=a_0y+a_1y_2$,其中 y_1,y_2 都是无穷级数,它们在 $x=\pm1$ 处是无界的,所以:

当 n 不是整数时,勒让德方程在[-1,1]上无有界解。

当 n 为整数时,勒让德方程的通解为: $y=a_0P_n(x)+a_1Q_n(x)$。

其中 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, $Q_n(x)$ 是无穷级数, $Q_n(x)$ 在 $x=\pm1$ 处无界

2. 勒让德多项式的几种表示式,母函数与递推公式

(1) 勒让德多项式的导数表示式,即罗德利克表达式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

(2) 围道积分表示为

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}2^n}\int_c\frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

(3) 定积分表示为

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\phi]^n\mathrm{d}\phi$$

令 $x=\cos\theta$,上式化为

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos\theta+\mathrm{i}\ \sin\theta\cos\phi]^n\mathrm{d}\phi$$

(4) 勒让德多项式的母函数:

$$F(x,z)=(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n$$

(5) 勒让德多项式的一些性质:

$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n$

$P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$

$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

(6) 勒让德多项式的一些递推公式:

$nP_n(x)=(2n-1)xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2}\quad(n\geq2)$

$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)\quad(n\geq1)$

$xP'_n(x)=nP_n(x)+P'_{n-1}(x)$

$P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x)$

$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

$(1-x^2)P'_n(x)=nP_{n-1}(x)+nxP_n(x)$

3. 函数展成勒让德多项式的级数

(1) 勒让德多项式的正交性:当 n 为整数时,勒让德方程有一个多项式的解 $P_n(x)$,当 n 取所有非负整数时,就得到一个函数系

$$\{P_n(x)\}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

这个函数系是一个正交完全系,且

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$$

(2) 函数展开为勒让德多项式的级数:设函数 $f(x)$ 在区间[-1,1]上有定义,且满足下列条件:

1°$f(x)$ 在开区间(-1,1)内是逐段光滑的函数。

2°积分$\int_{-1}^{1}f^2(x)\,\mathrm{d}x$具有有限值,则其系数 C_n 由下式所确定的级数在区间(-1,1)内部 $f(x)$ 的任一连续点 x 处收敛于 $f(x)$;在 $f(x)$

的间断点处,收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0-)+f(x_0+)]$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\quad P_n(x)\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)\quad(-1<x<1)$$

4. 连带的勒让德多项式

采用球坐标系,对拉普拉斯方程利用分离变量法求解会出现形如

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[n(n+1)-\frac{m^2}{rx^2}]y=0$$

的方程,称为连带勒让德方程,其中 m 为正整数。

当 n为正整数时,连带的勒让德方程在[-1,1]上有一个有界解

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^mP_n(x)}{\mathrm{d}x^m}\quad(m\leq n,\ |x|\leq 1)$$

从施特姆 — 刘维尔理论可知,连带的勒让德多项式$\{P_n^m(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$在区间[-1,1]上也构成正交完备系,我们可以把一个在[-1,1]上满足按固有函数系展开条件的函数 $f(x)$,展成如下形式的级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n^m(x)$$

其中 $C_n=\frac{(2n+1)(n-m)}{2(n+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x$

6.2 基本要求

(1) 了解勒让德方程的引出和概念。

(2) 掌握勒让德方程的级数解。

(3) 掌握勒让德多项式的性质及递推公式。

(4) 掌握函数展成勒让德多项式的级数。

(5) **熟练应用勒让德多项式方法求解球坐标系中的拉普拉斯方程的定解问题。**

6.3　例题分析

例 6－1　**求证** $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$。

证

$$P'_{l+1}(x) = \frac{1}{2^{l+1}(l+1)!}\frac{d^{l+2}}{dx^{l+2}}(x^2-1)^{l+1} =$$

$$\frac{1}{2^{l+1}(l+1)!}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}\left[\frac{d}{dx}(x^2-1)^{l+1}\right] =$$

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}[x(x^2-1)^l] =$$

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}[(x^2-1)^l + 2lx^2(x^2-1)^{l-1}] =$$

$$P_l(x) + \frac{1}{2^{l-1}(l-1)!}\frac{d^l}{dx^l}[x^2(x^2-1)^{l-1}] =$$

$$P_l(x) + \frac{1}{2^{l-1}(l-1)!}\frac{d^l}{dx^l}[(x^2-1)^l + (x^2-1)^{l-1}] =$$

$$P_l(x) + 2lP_l(x) +$$

$$\frac{1}{2^{l-1}(l-1)!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^{l-1} =$$

$$(2l+1)P_l(x) + P'_{l-1}(x)$$

所以　$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$

例 6－2　**求积分** $I = \int_0^1 P_l(x)\,dx$。

解　**因为** $P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)$

所以有　$P_l(x) = \frac{1}{2l+1}[P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)]$

因此:　$I = \frac{1}{2l+1}\int_0^1 [P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)]\,dx =$

$$\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(x)-P_{l-1}(1)]_0^1=$$

$$\frac{1}{2l+1}[P_{l-1}(0)+P_{l+1}(1)]$$

上式只适用于 $l\geq 1$。

当 $l=0$ **时,由于** $P_0(x)=1$,**所以** $I=\int_0^1 \mathrm{d}x=1$。**得**

$$I=\begin{cases}1 & (l=1)\\ 0 & (l=2n,n=1,2,\cdots)\\ (-1)^n(2n)!/2^{2n+1}(n+1)!n! & (l=2n+1,n=0,1,\cdots)\end{cases}$$

例6-3　在单位球面的北极点放置一正电荷 $4\pi\varepsilon_0$(**见图6-1**)**确定球内和球外的电势** u,**并将** u **用勒让德多项式的级数表示。**

解　由库仑定律,在 M **的电势为** $u(r,0)=\dfrac{1}{4\lambda\varepsilon_0}\dfrac{q}{|r-r_0|}$,**其中** q **为点电荷的电量**,ε_0 **为真空介电常数。**

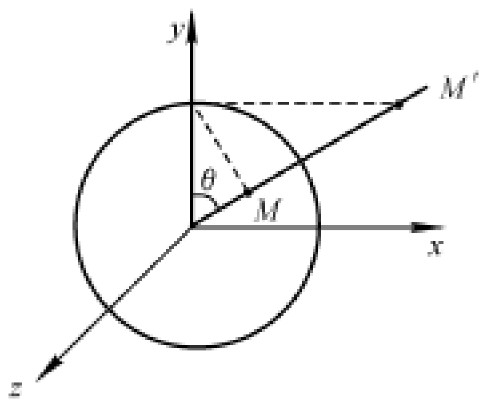


图6-1

依题意 $r=1,q=4\pi\varepsilon$,**有**

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}$$ **利用两点间距离的导数公式**

$$\frac{1}{|r-r'|}=\frac{1}{\sqrt{(r^2+r')^2-2rr'\cos\theta}}=\sum_{l=0}^{\infty}(r')^2P_l(\cos\theta)\Big/r^{l-1}$$

得

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty} r^lP_l(\cos\theta) & (r<1)\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)/r^{l+1} & (r>1)\end{cases}$$

例 6－4　计算积分 $I=\int_{-1}^{1}P(x)\mathrm{d}x$

解　因为 $(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)$

故
$$I=\frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)]\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(1)-P_{l-1}(-1)-P_{l-1}(1)+P_{l-1}(-1)]$$

又因　$P_l(1)=1\quad P_l(-1)=(-1)^lP_l(1)$

所以
$$I=\frac{1}{2l+1}[1-(-1)^{l+1}-1+(-1)^{l-1}]=\begin{cases}0, & l\neq 0\\ 2, & l=0\end{cases}$$

例 6－5　求证：$P_{2n+1}(0)=0\quad(n=0,1,\cdots)$。

证　因为 $P_l(x)=\sum\limits_{n=0}^{[l/2]}\dfrac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^ln!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$ **由此式看出**

$P_l(-x)=(-1)^lP_l(x)$，**令** $l=2n+1\quad x=0$

则 $P_{2n+1}(0)=(-1)^{2n+1}P_{2n+1}(0)=-P_{2n+1}(0)$

所以 $P_{2n+1}(0)=0$

例 6－6　设 $f(x)$ **是一个** k **次多项式，试证明当** $k<l$ **时，** $\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x=0$ **即** $f(x)$ **和** $P_l(x)$ **在**$[-1,1]$**上正交。**

证
$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^ll!}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2^ll!}\left[f(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\right]_{-1}^{1}-$$
$$\frac{1}{2^ll!}\int_{-1}^{1}f'(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x$$

上式右端第一项之值为 0，**再对上式第二部分积分**$(k-1)$**次并注意** $f(x)$ **是一个** k **次多项式，故** $f^k(x)$ **为常数。**

所以上式变为

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x=(-1)^k\frac{1}{2^ll!}\int_{-l}^{l}f^k(x)\frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{d}x^{l-k}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x=$$
$$(-1)^k\frac{1}{2^ll!}f^k(x)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{l-k}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x=$$

$$(-1)^k \frac{1}{2^l l!} f^k(x)\left[\frac{d^{l-k-1}}{dx^{l-k-1}}(x^2-1)^l\right]_{-1}^{1} = 0$$

例 6－7　求证: $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$

证　因为$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是勒让德多项式 $P_n(x)$ 的生成函数。所以$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, 对此式关于 t 求导, 得

$$(x-t)(1-2xt-t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

乘以

$$(1-2xt+t^2)$$

则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-t)P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2xt+t^2)nP_n(x)t^{n-1}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1}$$

比较两端 t^n 的系数, 得

$$nP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

即　$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$

例 6－8　将 $f(x) = x^2$ **按** $P_n(x)(n = 0,1,2,\cdots)$ **展开**。

解　$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$　其中 $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx$

可算得 $C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$

$$C_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 x dx = 0$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}(3x^2-1)dx = \frac{2}{3}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx = 0 \quad (n = 3,4,5\cdots)$$

故　$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$

例 6－9　求解定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (r < a) \\ u_r|_{r=a} = f(0) \end{cases}$

解　这里在第二类边界条件下研究球内的问题,采用球坐标,进行变量分离后,得

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0$$

$$\Theta''(\theta) + \cot\theta\Theta'(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$

欧拉型方程在条件 $R(r)|_{r=0}$ = **有限值之下的解为** $R(r) = Br^l$

勒让德型方程在条件 $\Theta(\theta)|_{\theta=0,\pi}$ = **有限值之下的解为** $\Theta(\theta) = AP_l(\cos\theta)$

利用叠加原理得拉普拉斯方程满足有界性条件的解为

$$u(\gamma,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \gamma^l P_l(\cos\theta)$$

由边界条件确定上式中的系数 C_l,**因为** $u_r = \sum_{l=1}^{\infty} C_l l r^{l-1} P_l(\cos\theta)$

从而
$$f(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l l a^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

由此确定出 $\begin{cases} C_0 \text{ 为任意常数} \\ C_l = \dfrac{2l+1}{2}\dfrac{1}{la^{l-1}}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \quad (l \neq 0) \end{cases}$

将此系数代入 $u(r,\theta)$ **中,得所求定解问题的解为**

$$u(r,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right]\frac{a}{l}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) + C_0$$

例 6－10　将函数 $f(x) = |x|$,**按勒让德多项式展开。**

解　令 $|x| = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x)$　$C_l = \dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|P_l(x)dx$

$|x|$ **是偶函数,故当** $P_l(x)$ **有函数时,即当** $l = 2n+1, n = 0,1,2,\cdots$ **时**

$$C_l = C_{2n+1} = 0$$

于是

$$C_{2n} = \frac{2(2n)+1}{2}\int_{-1}^{1} |x| P_{2n}(x)\mathrm{d}x = (4n+1)\int_0^1 xP_{2n}(x)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{4n+1}{2\cdot 2n+1}\int_0^1 [xP'_{2n+1}(x) - xP'_{2n-1}(x)]\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 x\mathrm{d}P_{2n+1} - \int_0^1 x\mathrm{d}P_{2n-1} =$$

$$xP_{2n+1}(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x - xP_{2n-1}(x)\Big|_0^1 +$$

$$\int_0^1 P_{2n-1}(x)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 P_{2n-1}(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

而 $$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} \tag{6.4}$$

将式(6.4)中的 n 换为 $n-1$，得

$$\int_0^1 P_{2n-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \tag{6.5}$$

将式(6.4)，(6.5)一并代入式(6.3)得

$$C_{2n} = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} - \frac{1}{(2n+1)}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} \tag{6.6}$$

于是

$$|x| = \frac{1}{2}P_0(x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}P_{2n}(x) \quad (|x|<1)$$

例 6－11 求积分 $\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$ 之值。

解 由 $(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)P_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad (l \geq 1)$ 有

$$xP_m(x)=\frac{1}{2m+1}[(m+1)P_{m+1}(x)+mP_{m-1}(x)]$$

故 $\int_{-1}^{1}xP_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{m+1}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m+1}(x)P_n(x)\mathrm{d}x+\frac{m}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m-1}(x)P_n(x)\mathrm{d}x$ 再用正交归一关系得

$$\int_{-1}^{1}xP_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2n}{4n^2-1} & (m=n-1)\\ \dfrac{2(n+1)}{(2n+3)(2n+1)} & (m=n+1)\\ 0 & (m-n\neq\pm1)\end{cases}$$

例 6－12　**已知** $P_0(x)=1$　$P_1(x)=x$，**求** $P_2(x)$ **和** $P_3(x)$ **的代数表达式。**

解　应用递推公式：$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$　$(l\geq0)$

令 $l=1$，得到　$3xP_1(x)=2P_2(x)+P_0(x)$

故　$P_2(x)=\frac{1}{2}[3xP_1(x)-P_0(x)]=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

同理　令 $l=2$ 得

$$P_3(x)=\frac{1}{3}[5xP_2(x)-2P_1(x)]=$$

$$\frac{5}{2}x\left(\frac{3x^2-1}{2}-\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

例 6－13　**求证勒让德多项式**：$p'_n(x)=\frac{n(n+1)}{2}$。

证　由 $P_n(x)$ 的微分表达式　$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$，对 x 求导 1 次，得

$$p'_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x+1)^n(x-1)^n]$$

根据函数乘积的 n 阶导数法则有

$$p'_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left\{(x+1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-1)^n + C_{n+1}^1 \frac{d}{dx}(x+1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n + C_{n+1}^2 \frac{d^2}{dx^2}(x+1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-1)^n + \cdots + C_{n+1}^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x+1)^n (x-1)\right\}$$

故

$$p'_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\left\{0 + (n+1)n2^{n-1} n! + 0 + \cdots + 0\right\} = \frac{n(n+1)}{2}$$

例 6－14　将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$ **展开为傅里叶—勒让德级数。**

解　该函数 $f(x)$ **在区间** $(-1,1)$ **内满足展开定理条件，因此可按勒让德多项式** $\{P_n\}$ **展开成如下级数**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad \text{其中} \quad C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx$$

所以

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 P_0(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad C_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 P_1(x)\,dx = \frac{3}{4}$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3x^2-1}{2}\,dx = 0$$

$$C_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{5x^3-3x}{2}\,dx = -\frac{7}{16}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)\,dx$$

因为

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \frac{1}{2} & (n=1) \\ 0 & (n\text{为偶数}) \\ (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & (n\text{为奇数}(n \geq 3)) \end{cases}$$

所以

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n=0)\\ \dfrac{3}{4} & (n=1)\\ 0 & (n\text{为偶数})\\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(2n+1)(n-2)!!}{2(n+1)!!} & (n\text{为奇数}(n\geq 3))\end{cases}$$

例 6 − 15　求证:

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & (n=0)\\ \dfrac{1}{2} & (n=1)\\ 0 & (n\text{为偶数})\\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & (\text{当 } n=3,5,7,\cdots\text{ 时})\end{cases}$$

证　$n=0$ 时, $P_0(x)=1$, 故 $\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=1$

易得　$n=1$ 时　$\int_0^1 P_1(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$

利用递推公式　$(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)$

$n=2,4,6,8,\cdots$ 时, $\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\dfrac{l}{2n+1}[P_{n-1}(0)-P_{n+1}(0)]$

$=0$

当 $n=3,5,7,\cdots$ 时, 有

$$\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(0)+P_{n+1}(0)]=$$

$$\frac{1}{2n+1}\left\{(-1)^{(n-1)/2}\frac{\left[2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]!}{\left[2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}-(-1)^{(n+1)/2}\frac{\left[2\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]!}{\left[2^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n+1}{2}\right)!\right]^2}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2n+1}\left\{\frac{(n-1)!}{\left[2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}+\frac{(n+1)!}{\left[2^{(n+1)/2}\left(\frac{n+1}{2}\right)!\right]^2}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2n+1}\left\{\frac{(n-1)!}{[(n-1)!!]^2}+\frac{(n+1)!}{[(n+1)!!]^2}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2n+1}\left\{\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}+\frac{n!!}{(n+1)!!}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2n+1}\frac{[(n-2)!!(n+1)+n!!]}{(n+1)!!}=$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2n+1}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}(2n+1)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}$$

例 6－16　以勒让德多项式为基本函数,在区间$(-1,1)$上把函数 $f(x)=x^4$ 展开为广义傅里叶级数。

解　根据勒让德多项式的完备性,即 $f(x)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_l P_l(x)$

$$f_1=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}x^n P_l(x)\mathrm{d}x=$$

$$\begin{cases}0 & (n<l\text{ 或 }n>l,\text{但 }n-l\text{ 为奇})\\ \dfrac{(2l+1)n!(n-l-1)!!}{(n-l)!(n+l+1)!!} & (n\geq l,n-l\text{ 为偶})\end{cases}$$

得知不为 0 的 f_l **在必须满足** $l\leq n=4$ **且** $n-l$ **为偶,所以只有** $f_0,f_2,f_4\neq 0$

所以　$f_0=\dfrac{1}{5},f_2=\dfrac{4}{7},f_4=\dfrac{8}{35}$

故　$f(x)=x^4=\dfrac{1}{5}P_0+\dfrac{4}{7}P_2+\dfrac{8}{35}P_4$

例 6－17　求解: $\begin{cases}\nabla^2 v=0 & (r<a)\\ v|_{r=a}=\cos^2\theta\end{cases}$

解　因为 $v(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\dfrac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=$

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

代入边界条件,得　$v(a,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}A_l a^l P_l(\cos\theta)=\cos^2\theta$

又因　$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-2)$

所以　$\cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}$

故　$\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l(\cos\theta)=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}$

其中　$A_0=\frac{1}{3},A_2=\frac{2}{3a^2}$

$A_l=0\quad(l\neq0,2)$

最后,得 $v(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3a^2}r^2P_2(\cos\theta)$

例 6－18　求证 $P_n(1)=1$。

证　$P_n(x)$ 的生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 令 $x=1$ 得

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n,(1-t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n)}(1)t^n$$

即　$1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n$　故 $P_n(1)=1$

6.4　习题全解

1. 证明 $P_n(1)=1,P_n(-1)=(-1)^n,P_{2n-1}(0)=0,$

$$P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

证　为了计算 $P_n(\pm1)$,我们要用勒让德多项式的导数表示式,即罗德利克表达式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

因为

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n]=$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n\cdot(x-1)^n+C_n^1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x+1)^n\cdot$$

$$\frac{d}{dx}(x-1)^n+\cdots+(x+1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n$$

除最后一项外,其余各项都含有$(x-1)$的因子,所以

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}(1+1)^n n!=1$$

此外,除第一项外,其余各项都含有$(x+1)$的因子,所以

$$P_n(-1)=\frac{1}{2^n n!}\cdot n!(-2)^n=(-1)^n$$

为了计算$P_n(0)$,利用表达式

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{m}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

当n为奇数时,$P_n(x)$无常数项,故

$$P_{2n-1}(0)=0$$

当n为偶数时,

$$P_{2n}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(4n-2m)!x^{2(n-m)}}{2^{2n}m!(2n-m)!(2n-2m)!}$$

它的常数项 $P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(4n-2n)!}{2^{2n}(n!)^2 0!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

2. 证明 a) $x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x)$

b) $x^3=\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)$

证 把$P_0(x)$,$P_1(x)$,$P_2(x)$与$P_3(x)$的表达式代入右端进行简化;另一个方法是将x^2及x^3按勒让德多项式函数系进行展开。

3. 若 $f(x)=\begin{cases}0 & (-1<x\leq 0)\\ x & (0<x<1)\end{cases}$

证明 $f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)-\frac{3}{32}P_4(x)+\cdots$

证　将 $f(x)$ 展开成勒让德多项式的级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} xP_n(x)\mathrm{d}x$$

将 $P_n(x)$ 用罗德利克表达式代入，然后用分部积分法求出右端积分。当 $n=0$ 及 $n=1$ 时，被积函数分别是 x 及 x^2，可以直接积分，当 $n \geq 2$ 时，可得

$$C_n = -\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}(x^2-1)^n\right]_0^1$$

因为 $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$，对它求 $n-2$ 阶导数，所以求完导数后所得的每一项都会含有 $x-1$ 的因子，即

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}(x^2-1)^n\right]_{x=1} = 0$$

计算

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}(x^2-1)^n\right]_{x=0}$$

由于结论中右端只有四项，所以只需令 $n=2,3,4$ 求出上述值。

4. 证明

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}[p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x)]$$

证　先证明 $p'_{n+1}(x) = p'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x)$

利用罗德利克表达式，有

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} =$$

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^{n+1}\right] =$$

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[x(x^2-1)^n] =$$

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}] =$$

$$P_n(x)+\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}[x^2(x^2-1)^{n-1}]=$$

$$P_n(x)+\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\cdot[(x^2-1)^n+(x^2-1)^{n-1}]$$

整理后结论得证。

5. **证明**

$p'_n(x)=(2n-1)P_{n-1}(x)+(2n-5)P_{n-3}(x)+(2n-9)P_{n-5}(x)+\cdots$

提示:反复利用

$$p'_{k+1}(x)=(2k+1)P_k(x)+p'_{k-1}(x)$$

即可证明本题的结论。

6. **验证** $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ **满足勒让德方程**

提示:要证明 $P_n(x)$ **满足**

$(1-x^2)p''_n(x)-2xp'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0$

因为 $\qquad \dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)^{n-1}$

故 $\qquad (x^2-1)\dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)^n$

考虑到 $P_n(x)$ **的表达式中含有**$(x^2-1)^n$ **对** x **求** n **阶导数,所以** $p''_n(x)$ **中应含有**$(x^2-1)^n$ **对** x **求** $n+2$ **阶导数,我们在上式两端对** x **求** $n+1$ **阶导数,并利用求乘积的高阶导数的莱布尼兹公式,即可得到要证的结论。**

7. **在半径为 1 的球内,求调和函数** u,**使**

$$u|_{r=1}=3\cos 2\theta+1$$

解 **在球面坐标系**(γ,θ,ϕ) **中**

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\gamma^2}\frac{}{\gamma}\left(\gamma^2\frac{u}{\gamma}\right)+\frac{1}{\gamma^2\sin\theta}\frac{}{\theta}\left(\sin\theta\frac{u}{\theta}\right)+\frac{1}{\gamma^2\sin^2\theta}\frac{^2u}{\phi^2}$$

由于边界条件不依赖于 φ,所以 u 也应不依赖于 φ,于是要解下列边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \gamma}\left(\gamma^2 \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}\right) + \dfrac{1}{\gamma^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right] = 0 & (0 < \gamma < 1) \\ u\big|_{\gamma=1} = 3\cos 2\theta + 1 & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \left| u \right|\big|_{\gamma=0} < \infty & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

用分离变量法来求解,令

$$u(\gamma,\theta) = R(\gamma)\Theta(\theta)$$

代入方程

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial \gamma}(\gamma^2 R')}{R} = -\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\Theta')}{\Theta} = \lambda$$

即　$\lambda = n(n+1)$, $x = \cos\theta$, $\Theta(\arccos x) = p(x)$,则得

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + n(n+1)p = 0$$

这是勒让德方程,为了使解 u 有界,所以在 $[0,\pi]$ 内 $\Theta(\theta)$ 也应有界,即 $p(x)$ 在 $[-1,1]$ 上应有界,根据前面对勒让德方程解的有界性分析,n 只能取整数,不妨取 n 为非负整数,故

$$p(x) = C_n P_n(x) + D_n Q_n(x)$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 阶勒让德多项式,或者

$$\Theta_n(\theta) = C_n P_n(\cos\theta) + D_n Q_n(\cos\theta)$$

再由有界性得 $D_n = 0$,即

$$\Theta_n(\theta) = C_n P_n(\cos\theta)$$

R 所满足的方程是一个欧拉方程,它的通解为

$$R_n(\gamma) = A_n \gamma^n + B_n \gamma^{-(n+1)}$$

当 $r \to 0$ 时,$|R_n|$ 应保持有界,故 $B_n = 0$,即

$$R_n(\gamma) = A_n \gamma^n$$

利用迭加原理,原问题的解可表示为

$$u(\gamma,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \gamma^n P_n(\cos\theta)$$

按下来就是要利用边界条件确定系数 C_n,即 C_n 满足

$$3\cos 2\theta + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)$$

如何计算 C_n 呢?要用一些小的技巧,首先令 $x = \cos\theta$,则

$$3\cos 2\theta + 1 = 3(2\cos^2\theta - 1) + 1 = 6x^2 - 2$$

故上式可写成 $6x^2 - 2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$

从左端可知,当 $n \geq 3$ 时,$C_n = 0$,又因左端不含有 x 项,故 $C_1 = 0$,剩下只有 C_0 与 C_2 了,可以直接利用公式来计算,也可以用比较系数法,即由

$$6x^2 - 2 = C_0 + C_2 P_2(x) = C_0 + C_2 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

得 $C_0 = 0, C_2 = 4$

最后得到解 $u(\gamma,\theta) = 4\gamma^2 P_2(\cos\theta) = 2\gamma^2(3\cos^2\theta - 1)$

8. 在半径为 1 的球内,求调和函数,已知在球面上

$$u\big|_{\gamma=1} = \begin{cases} A & (0 \leq \theta \leq \alpha) \\ 0 & (\alpha < \theta \leq \pi) \end{cases}$$

提示:与第 7 题类似,所不同的只是边界条件不同。

解 可表示为 $u(\gamma,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \gamma^n P_n(\cos\theta)$

其中 $C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{\cos\alpha}^{1} AP_n(x)\mathrm{d}x \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

用 $P_n(x)$ 的罗德利克表达式即可计算 C_n 的值。

9. 在半径为 1 的球的外部求调和函数,使

$$u\big|_{\gamma=1} = \cos^2\theta$$

提示:本题是求调和函数,这个函数与变量 φ 无关,是在球的外部求解,所以解应该在球的外部(包括无穷远点)是有界的,再由外部问题的唯一性,它还应满足当 $\gamma \to \infty$ 时趋向于零,通过变量分离后得到两个微分方程,一个是勒让德方程,另一个是关于 R 的欧拉方程,而欧拉方程的通解为

$$R_n(\gamma) = C_n\gamma^n + D_n\gamma^{-(n+1)} \quad (n\text{ 为非负整数})$$

显然,对 $n\geq 0$ 当 $\gamma\to\infty$ 时,γ^n 不可能趋向于零,故 $C_n=0,n=0,1,2,\cdots$,从而它的解可表示为

$$u(\gamma,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\gamma^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

在确定系数 D_n 时,仍令 $x=\cos\theta$,并使用第 7 题中的比较系数法。

10. 证明勒让德多项式的母函数为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}$,即

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

解　当 $|t|$ 足够小时,对固定的 x 可使 $|t^2-2tx|<1$,先将 $[1+(t^2-2xt)]^{-\frac{1}{2}}$ 展开成 t^2-2xt 的幂级数,利用微积分中已有的公式 $(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$,其中 α 为任意实数,这个级数称为二项式级数,当 $\alpha\leq -1$ 时,它的收敛域为 $(-1,1)$;当 $-1<\alpha<0$ 时,它的收敛区域为 $(-1,1]$,当 $\alpha\geq 0$ 时它的收敛域 $[-1,1]$ 现在 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$,故

$$[1+(t^2-2xt)]^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\gamma-1)}{2^{\gamma}\gamma!}(2xt-t^2)^{\gamma}=$$

$$1+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{(2\gamma)!}{2^{2\gamma}(\gamma!)^2}(2xt-t^2)^{\gamma}$$

又　$(2xt-t^2)\gamma=2^{\gamma}x^{\gamma}t^{\gamma}\left(1-\dfrac{t}{2x}\right)^{\gamma}=$

$$2^{\gamma}x^{\gamma}t^{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-k+1)}{k!}(2x)^{-k}t^k=$$

$$\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k\frac{\gamma!x^{\gamma-k}2^{\gamma-k}}{k!(\gamma-k)!}t^{k+\gamma}$$

(注意:这里的 γ 是正整数)

因此　$[1+(t^2-2xt)]^{-\frac{1}{2}}=$

$$1+\sum_{\gamma=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\gamma}(-1)^k\frac{\gamma!(2\gamma)!2^{\gamma-k}x^{\gamma-k}}{2^{2\gamma}(\gamma!)^2k!(\gamma-k)!}t^{k+\gamma}$$

现在的问题是要说明 t^n 前的系数是 $P_n(x)$，令 $n=k+\gamma$，其中 k，γ 都是非负整数($\gamma\geq 1$)，且 $0\leq k\leq\gamma$，要它们之和为 n 有多种可能性，例如 $\gamma=n,k=0$；$\gamma=n-1,k=1$；…，$\gamma=n-m,k=m$；等等，考虑一般的情况，即 $\gamma=n-m,k=m$，由于 $k\leq\gamma$，即 $m\leq n-m$，或 $m\leq\frac{n}{2}$，为使 m 为整数，故 $m\leq[\frac{n}{2}]$，这时 t^n 前的系数为

$$(-1)^m\frac{(2n-2m)!x^{n-2m}}{2^n(n-m)!m!(n-2m)!}$$

所以

$$[1+(t^2-2xt)]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!x^{n-2m}}{2^n(n-m)!m!(n-2m)!}t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

11．利用勒让德多项式的母函数，证明递推关系

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

解　$$(1+t^2-2xt)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

上式两端对 t 求导数得

$$-\frac{1}{2}(1+t^2-2xt)^{-\frac{3}{2}}(2t-2x)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1},$$

即　$$(1+t^2-2xt)^{-\frac{1}{2}}(x-t)=(1+t^2-2xt)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

再利用母函数定义得

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(1+t^2-2xt)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1},$$

即　$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^n,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)P_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n$$

比较两端 t^n 的系数得

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

第七章　数学物理方程的差分解法

7.1　内容要点

数学物理方程的各种定解问题,只有当方程比较简单而区域又很规则时,才可能用前几章所讲的一些解法求出其准确解来,工程技术中所提出的定解问题,往往不是由于方程比较复杂,就是由于区域不很规则,以致无法求出其准确解。这时,有效的做法就是求出近似解,只要近似程度满足实际需要,所提的定解问题就算获得了解决。求解数学物理方程常用的近似方法有差分法,变分法及有限元法等。

1. 将微分方程化成差分方程

由于

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x + x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$u''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x)}\right] =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, $u'(x)$ 可以近似地用差商

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \text{或} \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

代替, $u''(x)$ 可近似地用二阶差商

$$\frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

代替一维热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

可用方程 $\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} =$

$$a^2 \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

近似代替,其截断误差为 $o(\Delta t) + o(\Delta x^2)$

一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

可以用方程

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} =$$

$$a^2 \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

近似代替,其截断误差为 $o((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$

二维拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

可以用方程

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} +$$

$$\frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} = 0$$

近似代替,其截断误差为: $o((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)$

2. **拉普拉斯方程的差分格式**

对拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u|_{p} = f(x, y) \end{cases} \tag{7.1}$$

通过作平行于坐标轴的两族直线,将区域 Ω分成许多小网格,就把求解拉普拉斯方程的狄里克雷问题转化成为解下面的代数方程组问题。

$$U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0 \qquad (7.1)$$

其中 $U_{i,j}$ 表示解 $u(x,y)$ 在结点(x_i, y_j) 处的近似解, $U_{i+1,j}$ 表示 $u(x, y)$ 在结点(x_{i+h}, y_j) 处的近似值,余类推

如果四个结点$(x_{i+h}, y_j)(x_{i-h}, y_j)$, (x_i, y_{j+h}), (x_i, y_{j-h}) 中有点落在 P_h 上,则方程(1) 中对应的 U 值就用边界条件中的值代替。

方程组(7.1) 通常采用迭代法求解,最简单的迭代方程是同步迭代法,但是,同步迭代法的收敛速度是比较慢的,为了加快迭代程序的收敛性,常常采用异步迭代法,在异步迭代法中有一半是用了迭代的新值,可以预料异步迭代法的收敛速度比同步迭代法的收敛速度要快一倍左右,在求解拉普拉斯方程的定解问题时,异步迭代法是一个常被采用的方法。

3. 热传导方程的差分格式

一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{u}{t} = a^2 \dfrac{{}^2u}{x^2} & (0 < x < 1, 0 < t < T) \\ u\big|_{t=0} = f(x) & (0 < x < 1, \text{且 } f(0) = f(1) = 0) \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0 & (0 < t \leq T) \end{cases} \qquad (7.2)$$

显式的差分格式如下:

作两族平行线　$x = x_i = i\Delta x \quad (i = 0, 1, 2, \cdots N - 1, N)$

$$t = t_j = j\Delta t \quad \left(j = 0, 1, 2, \cdots, \left[\frac{T}{\Delta t}\right]\right),$$

此处 $N\Delta x = 1$, $\left[\dfrac{T}{\Delta t}\right]$ 表示$\dfrac{T}{\Delta t}$ 的整数部分。

在网格的内结点(x_i, t_j) $\left(i = 1, 2, \cdots, N - 1; j = 1, 2, \cdots \left[\dfrac{T}{\Delta t}\right]\right)$ 处

分别用　$\dfrac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - \Delta t)}{\Delta t}$,

$$\frac{u(x_i + \Delta x, t_j - \Delta t) - 2u(x_i, t_j - \Delta t) + u(x_i - \Delta x, t_j - \Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

代替导数　$\dfrac{u}{t}, \dfrac{{}^2u}{x^2}$

于是式(7.2)中的微分方程化成差分方程

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta t}=a^2\frac{U_{i+1,j-1}-2U_{i,j-1}+U_{i-1,j-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$(j=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}]) \tag{7.3}$$

其中 $U_{i,j}$ 表示解 $u(x,t)$ 在结点(x_i,t_j)的近似值。式(7.2)中的初始条件与边界条件各自化为在边界结点上的初始条件与边界条件

$$\begin{cases} U_{i,0}=f(x_i) \\ U_{0,j}=0,\quad U_{N,j}=0 \end{cases} \tag{7.4}$$

这样一来,求解定解问题(7.2)就化为求方程组(7.3)在条件式(7.4)下的解。

记　$w=a^2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$,则式(7.3)可改写成

$$U_{i,j}=w(U_{i-1,j-1}+U_{i+1,j-1})+(1-2w)U_{i,j-1} \tag{7.5}$$

i表明,第 j 排上任一内点的值仅依赖于第 $j-1$ 排上相邻三个结点的值。

从式(7.5)可清楚地看出,它的解可以按 t 增加的方向逐排求出:利用初始条件和边界条件式(7.4)可求出第 0 排上的值 $U_{i,0}(i=0,1,2,\cdots,N)$;利用式(7.5)可以求出第 1 排上的值 $U_{i,1}(i=0,1,2,\cdots,N-1)$,然后由 $U_{i,1}(i=1,2,\cdots,N-1)$和边界条件 $U_{0,1}=U_{N,1}=0$,再利用(7.5)式在 $j=2$ 的情形计算出 $U_{i,2}(i=1,2,\cdots,N-1)$,如此逐步进行下去,可求出所有内结点处的值 $U_{i,j}$。

4. 波动方程的差分格式

对弦振动方程的混合问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<1,0<t<T) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) & (0<x<1,且\ \varphi(0)=\varphi(1)=0) \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0\ (0<t\leq T) & \end{cases} \tag{7.6}$$

为例,这样做是不失一般性的,因为其基本思想及方法都可应用于其他各种情况。

作两族平行线

$$x = x_i = i\Delta x \quad (i = 0,1,2,\cdots, N;\ N\Delta x = 1)$$

$$t = t_j = j\Delta t \quad (j = 0,1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}]$$

在内结点$(x_i, t_j)(i = 1,2,\cdots, N-1;\ j = 1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}])$上分别用

$$\frac{u(x_i, t_j+\Delta t) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_j-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{u(x_i+\Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i-\Delta x, t_j)}{(\Delta x)^2}$$

代替$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,记 $w = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$,于是式(7.6)中的微分方程化为

$$U_{i,j+1} = w^2(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + 2(1-w^2)U_{i,j} - U_{i,j-1}$$

$$(i = 1,2,\cdots, N-1;\ j = 1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}]) \tag{7.7}$$

式(7.6)中的初始条件与边界条件各自化为在边界结点上的初始条件和边界条件

$$\begin{cases} U_{i,0} = \varphi(x_i) & (i = 1,2,\cdots, N-1) \\ U_{i,1} - U_{i,0} = \psi(x_i)\Delta t \\ U_{0,j} = U_{N,j} = 0 & (j = 0,1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}]) \end{cases} \tag{7.8}$$

这样就把求定解问题式(7.6)化为在条件式(7.8)下求解代数方程组(7.7),计算的方法与热传导方程一样。

7.2　基本要求

(1) 掌握微分方程化为差分方程的方法。

(2) 掌握拉普拉斯方程和差分格式及异步迭代法求解。

(3) **掌握热传导方程的显式差分格式及解法。**

(4) **掌握波动方程的差分格式及解法。**

7.3　例题分析

例 7－1　**使用向前差分法求解定解问题**:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, t > 0) \\
u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t > 0) \\
u(x, 0) = \sin(\pi x) & (0 \leq x \leq 1)
\end{cases}
$$

的数值解。

解　**容易验证定解问题有解** $u(x, t) = e^{-x^2 t}\sin\pi x$, **若取** $h = 0,$ $1, k = 0.0005$ **则** $\lambda = 0.05 < \frac{1}{2}$ **差分法是稳定的**, **在** $t = 0.5$ **打印结果见下表**

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$u_{i,1000}$ $k = 0.0005$	$\lvert u(x_i, 0.5) - u_{i,1000} \rvert$
0.0	0	0	-
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}
0.4	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}
0.5	0.00719188	0.00739934	2.075×10^{-4}
0.6	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}
0.7	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}
0.9	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}
1.0	0	0	-

例 7－2　**求波动方程定解问题**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0) \\ u(x, 0) = \sin \pi x \quad (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

的数值解。

解　使用波动方程有限差分法，取 $m = 10$, $T = 1$, **和** $N = 20$, **即** $h = 0.1$, $k = 0.05$ **和** $\lambda = 1$, **对于** $i = 0, 1, \cdots, 10$, **近似值** $U_{i,N}$ **见下表，精确到所给数字。**

x_i	$U_{i,w}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

例 7－3　**求泊松方程定解问题：**

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x e^y, 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = 0, u(2, y) = 2e^y, 0 \leq y \leq 1 \\ \text{的数值解。} \\ u(x, 0) = x \quad u(x, 1) = ex, 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

解　使用泊松方程的有限差分算法计算，取 $n = 6$, $m = 5$, **停止标准取**

$$\left| u_{i,j}^{(l)} - u_{i,j}^{(l-1)} \right| < 10^{-10}\ (i = 1,2,\cdots,5)(j = 1,2,\cdots 4)$$

则过程停止在 $l = 61$,**见下表**

i	j	x_i	y_i	$u_{ij}^{(61)}$	$u(x_i, y_j)$	$\left\| u(x_i, y_j) - u_{ij}^{(61)} \right\|$
1	1	0.3333	0.2000	0.40726	0.40713	1.30×10^{-4}
1	2	0.3333	0.4000	0.49748	0.49727	2.08×10^{-4}
1	3	0.3333	0.6000	0.60760	0.60737	2.23×10^{-4}
1	4	0.3333	0.8000	0.74201	0.74183	1.60×10^{-4}
5	1	1.6667	0.2000	2.0360	2.0357	3.71×10^{-4}
5	2	1.6667	0.4000	2.4870	2.4864	5.84×10^{-4}
5	3	1.6667	0.6000	3.0375	3.0369	6.41×10^{-4}
5	4	1.6667	0.8000	3.7097	3.7092	4.89×10^{-4}

例 7-4　对于波动方程定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \sin\pi x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(1) **取** $h = 0.1, k = 0.05$; (2) **取** $h = 0.05, k = 0.1$; (3) **取** $h = 0.05, k = 0.05$。

解　使用波动方程有限差分算法,结果见下表

$h = 0.1, k = 0.05$

(1)

j	i	x_i	t_j	$u_{i,j}$
2	10	0.2	0.5	0.00285202
5	10	0.5	0.5	0.00485216
7	10	0.7	0.5	0.00392548

(2) $h = 0.05, k = 0.1$

j	i	x_i	t_j	$u_{i,j}$
4	5	0.2	0.5	-0.0028789

10	5	0.5	0.5	-0.0048977
14	5	0.7	0.5	-0.0039623

(3) $h = 0.05 \quad k = 0.1$

j	i	x_i	t_j	$u_{i,j}$
4	10	0.2	0.5	-1.6792×10^{-5}
10	10	0.5	0.5	-3.1780×10^{-15}
14	10	0.7	0.5	-2.8588×10^{-15}

例 7-5 **求边界为** $x = 0, x = 4, y = 3$ **边界上结点值,如图 7-1 所示的拉普拉斯方程近似解。**

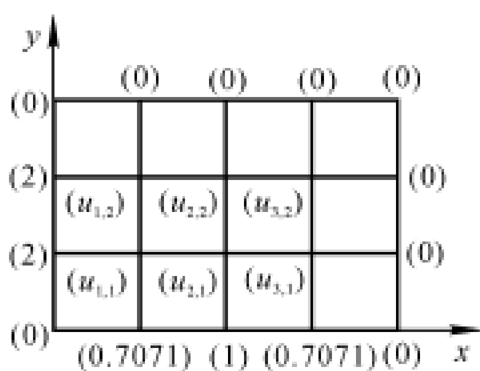


图 7-1

解 **边界值为**

$$\begin{cases} u_{1,0} = u_{3,0} = 0.7071 \\ u_{2,0} = 1 \\ u_{0,1} = u_{0,2} = 2 \\ u_{0,0} = u_{4,3} = u_{i,3} = 0 \\ \qquad (i = 0,1,2,3) \end{cases}$$

采用异步迭代公式:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}\right)$$

零级近似值为边界值的平均值,边界共 14 个结点,平均值为

$$\frac{1}{14}(2 \times 2 + 0.7071 \times 2 + 1) = 0.4582$$

$$u_{i,j}^{(0)} = 0.4582 \quad (i = 1,2,3, j = 1,2)$$

现依 i, j **增大的次序用异步迭代公式求** $u_{i,j}^{(1)}$

$$u_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[u_{2,1}^{0} + u_{1,2}^{(0)} + u_{0,1}^{(0)} + u_{1,0}^{(1)}\right] =$$

$$\frac{1}{4}(0.4582 + 0.4582 + 2 + 0.7071) = 0.9059$$

这里用到边界值 $u_{0,1} = u_{0,1}^{(k)} = 2, u_{1,0} = u_{1,0}^{(k)} = 0.7071 \quad (k = 0, 1,2,3,\cdots)$。

同理可得

$$u_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(0.4582 + 0.4582 + 0.9059 + 1) = 0.7056$$

$$u_{3,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(0.4582 + 0.7056 + 0.7071 + 0) = 0.4677$$

$$u_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(0.4582 + 0 + 2 + 0.9059) = 0.8410$$

$$u_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(0.4582 + 0 + 0.8410 + 0.7056) = 0.5012$$

$$u_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(0 + 0 + 0.5012 + 0.4677) = 0.2422$$

计算表明,当经16次迭代后,有 $|u_{i,j}^{(16)} - u_{ij}^{(15)}| < 0.001$　$(i = 1,2,3 \quad j = 1,2)$

例 7-6　用差分法解热传导问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = \frac{{}^2 u}{x^2} \quad (0 < x < 1 \quad 0 \leq t \leq 1) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \\ u|_{t=0} = x(x-1) \end{cases}$$

解　选步长 $\Delta x = 0.2 \quad \Delta t = 0.02$ 则 $w = a^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$

满足稳定和收敛条件,差分方程为 $u_{i,j} = w(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) + (1-2w)u_{i,j-1} \quad (i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,\cdots,50)$

边界条件为　$u_{0,j} = u_{5,j} = 0 \quad (j = 0,1,2,\cdots,50)$

初始条件为　$u_{i,0} = \frac{i}{5}(1 - \frac{i}{5})(i = 0,1,\cdots,5)$

先行算 $j = 0$ 的结合点,它由初始条件直接给出:

$u_{0,0} = 0,\quad u_{1,0} = 0.16,\quad u_{2,0} = 0.24$

$u_{3,0} = 0.24,\quad u_{4,0} = 0.16,\quad u_{5,0} = 0$

再用差分方程计算 $j = 1$ 的右结点值。

因 $u_{i,j} = w(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) + (1-2w)u_{i,j-1} =$

$$\frac{1}{2}(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1})$$

故 $$u_{i,1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,0} + u_{j+1,0})$$

$$u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{0.0} + u_{2.0}) = \frac{1}{2}(0 + 0.24) = 0.12$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{2}(u_{1,0} + u_{3.0}) = \frac{1}{2}(0.16 + 0.24) = 0.2$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{2}(u_{2.0} + u_{4.0}) = \frac{1}{2}(0.24 + 0.16) = 0.2$$

$$u_{4,1} = \frac{1}{2}(u_{3.0} + u_{5.0}) = \frac{1}{2}(0.24 + 0) = 0.12$$

同理可计算 $j = 2,3,\cdots,50$ 各行的结合值,得到 $4\times 50 = 200$ 个结合值,组成了问题的近似解。

例 7－7　考虑椭圆方程

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -2\exp(x+y) \\ u|_{\partial\Omega} = \exp(x+y) \end{cases}$$

其中 $\Omega = [0.1]\times[0.1]$。

解　其精确解为 $u(x,y) = \exp(x+y)$ 取 $M = 10$, $N = 10$,应用差分格式

$$\begin{cases} -\frac{1}{h_1^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{h_2^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = \\ \qquad f(x_i, y_i) \\ (1\leq i\leq M - f, 1\leq j\leq N-1) \\ u_{i,j} = \phi(x_i, y_i) \quad (i = 0 \text{ 或 } M \quad j = 0 \text{ 或 } N) \end{cases}$$

进行计算,用 Gauss - Seidel 迭代法解线性方程组,初始迭代向量取 $u^{(0)} = 0$ 迭代至 $\| u^{(k)} - u^{(k-1)} \| \leq \frac{1}{2}\times 10^{-6}$,共迭代 139 次,部分数值见下表

(x, y)	数值解	精确解	|精确解 — 数值解|
(0.2　0.2)	1.491940	1.491825	0.000116
(0.2　0.5)	2.013950	2.013753	0.000197
(0.2　0.8)	2.718440	2.718282	0.000158
(0.5　0.2)	2.013950	2.013757	0.000197
0.5　0.5	2.718621	2.718282	0.000339
0.5　0.8	3.669563	3.669297	0.000266
0.8　0.2	2.718440	2.718282	0.000158
0.8　0.5	3.669563	3.669297	0.000266
0.8　0.8	4.953257	4.593032	0.000224

7.4　习题全解

1. **设区域 Ω 的边长为 1,中心在原点的正方形,用差分解法(取步长 $h = 0.1$) 求拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的狄氏问题的第 1 次近似质 $U_{i,j}^{(1)}$ (取零次近似值为 $U_{i,j}^{(1)} = 0$),其边界条件为 $u|_{x=\pm\frac{1}{2}} = -1$, $u|_{y=\pm\frac{1}{2}} = 1$。**

解　**求解过程参见例** 7-5。

2. **用差分方法计算热传导方程下列混合问题**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (0 < t \leq 1) \\ u|_{t=0} = x(1-x) \end{cases}$$

的近似解,(**取** $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.02$)

解　**参见例** 7-6。

3. **写出下列波动方程混合问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \\ u|_{t=0} = x(1-x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的差分格式。

解 **作两条平行线**: $x = x_i = i\Delta x \quad (i = 0,1,2,\cdots,N;\ N\Delta x = 1)$

$$t = t_j = j\Delta t \quad (j = 0,1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}])$$

在内结点 (x_i, t_j) **上分别用**

$$\frac{u(x_i, t_j+\Delta t) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_j - \Delta t)}{(\Delta t)^2},$$

$$\frac{u(x_i+\Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{(\Delta x)^2}$$

代替 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ **和** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **记** $w = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ **则题中的微分方程化为**

$$U_{i,j+1} = w^2(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + 2(1-w^2)U_{i,j} - U_{i,j-1}$$

$$(i = 1,2,\cdots,N-1;\ j = 1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}])$$

题中的初始条件与边界条件各自化为在边界结点上的初始条件和边界条件

$$\begin{cases} U_{i,0} = x_i(1-x_i) \quad (i = 1,2,\cdots,N-1) \\ U_{i,1} - U_{i,0} = 0 \\ U_{0,j} - U_{N,j} = 0 \quad (j = 0,1,2,\cdots,[\frac{T}{\Delta t}]) \end{cases}$$

附录　模拟试题及答案

模拟试题 A

1. 设某溶质在溶液中扩散,它在溶液中各点的浓度用 $u(x, y, z, t)$ 表示,由 Nernst 定律知,溶质在时间 $\mathrm{d}t$ 内通过曲面 $\mathrm{d}s$ 的质量 $\mathrm{d}M$ 和$\frac{u}{n}$成正比,即 $\mathrm{d}u = -D\frac{u}{n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,其中 D 为扩散系数,求 u 满足的方程。

2. 求方程$\frac{^2u}{x^2} - \frac{^2u}{x\ y} - 2\frac{^2u}{y^2} = 1$ 在条件 $u|_{y=0} = 0, \frac{u}{y}|_{y=0} = 2x$ 下的解。

3. 求解下列初边值问题:

$$
\begin{cases}
\frac{^2u}{t^2} = a^2\frac{^2u}{x^2} + b\sinh x & (0 < x < l, t > 0) \\
u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\
u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (0 \leq x \leq l)
\end{cases}
$$

其中 b 为常数。

4. 有一长为 l 的均匀细杆,侧表面绝缘,一端绝热,另一端永远保持温度 u_0,初始温度为 $\phi(x)$,求杆上的温度分布。

5. 求解下更定解问题:

$$
\begin{cases}
\frac{^2u}{t^2} = a^2\frac{}{x}\left(x\frac{u}{x}\right) & (0 < x < l, t > 0) \\
|u(0, t)| < \infty, u(l, t) = 0 & (t > 0) \\
u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = 0 & (0 \leq x \leq l)
\end{cases}
$$

6. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < l, t > 0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=t} = 0 & (t > 0) \\ u|_{t=0} = f(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

其中 $f(x)$ **是已知函数。**

[答案与提示]

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$

若 D **为常数,方程简化为** $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u$

2. **使用行波法,首先求出两级特征线**: $y - x = \text{const}$ **和** $y + 2x = \text{const}$ **再通过特征变换将方程化为可积分的形式**: $u(x, y) = 2xy - \dfrac{3}{4}x^2$

3. **这个问题的特点是非齐次方程,齐次定解条件,可以用两种方法求解一种方法是特征函数展开法,另一种是作变量代换将方程化成齐次的,且保留边界条件是齐次的,再用分离变量法。**

$$u(x, t) = \frac{b}{a^2}\left(\frac{\sinh l}{l}x + \sinh x\right) +$$

$$\frac{2bl^2\sinh l}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi(l^2 + n^2\pi^2)}\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$

4. **这个问题可归结为下列定解问题**:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u_x|_{x=0} = 0 & (t \geq 0) \\ u|_{x=l} = u_0 & (t \geq 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$

有一个边界条件是非齐次的,故先进行未知函数代换,使边界条件化为齐次,同时保持方程为齐次

$$u(x,t)=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n-\frac{(-1)^n 4u_0}{(2n+1)\pi}\right)\cdot e^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi a\right)^2 t}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

其中 $$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,\mathrm{d}x$$

5. 这个问题的特点是方程为变系数,若把右端的微分求出来,就得到两项:$a^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial u}{\partial x}$,虽然如此,这个问题仍可用分离变量法求解令 $u(x,t)=x_{(t)}T_{(t)}$ 代入方程并进行变量分离可得

$$T''+\lambda^2 a^2 T=0 \quad xx''+x'+\lambda^2 x=0$$

关于 x 的方程不好求解,作自变量代换:$y=2\lambda\sqrt{x}$

则得 $$\frac{\mathrm{d}^2 X^*}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}X^*}{\mathrm{d}y}+\lambda^2 X^*=0$$

这是零阶贝塞尔方程,它的通解为

$$X^*(y)=C_1J_0(y)+C_2Y_0(y) \quad \left(X^*(y)=X\left(\frac{y^2}{4\lambda}\right)\right)$$

或 $$X(x)=C_1J_0(2\lambda\sqrt{x})+C_2Y_0(2\lambda\sqrt{x})$$

由 $|u(0,t)|<\infty$,得 $C_2=0$,再由 $x(l)=0$ 得:$J_0(2\lambda\sqrt{l})=0$

即 $$2\lambda\sqrt{l}=\mu_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

其中 μ_n 是 $J_0(x)$ 的正零点,故特征值为:$\lambda_n=\frac{\mu_n}{2\sqrt{l}} \quad (n=1,2,\cdots)$

原定问题的解可表示为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{a\mu_n}{2\sqrt{l}}t+b_n\sin\frac{a\mu_n}{2\sqrt{l}}t\right)J_0\cdot\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

最后利用初始条件确定 a_n, b_n

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{a\mu_n}{2\sqrt{l}}tJ_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

其中 $$a_n=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l f(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\mathrm{d}x$$

6. 这里的方程是非线性(半线性)方程,一般说来,非线性方程

的定解问题很难求出解的表达式,但现在这个问题可以通过变换把问题进行转化事实上,设 $v(x,t)$ 是方程 $\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 的解,则 $u(x,t)=-2a^2\frac{\partial u}{\partial x}/v$ 一定是方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解,因此问题在于求出 $v(x,t)$,为此要把 $v(x,t)$ 的定解条件写出来,将上述 u,v 之间的关系对 x 积分一次得 $v(x,t)=e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(x,t)\mathrm{d}x}$。

令 $t=0$ 得

$$v\big|_{t=0}=e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(x,0)\mathrm{d}x}=e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x}\xlongequal{\text{def}}\varphi(x)$$

(即把左边的已知函数记成 $\varphi(x)$)

另外,还有 $v_x=e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(x,t)\mathrm{d}x}\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}u(x,t)\right)$

因此,v 满足下列定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0<x<l,t>0)\\ v_x\big|_{x=0}=v_x\big|_{x=l}=0 & (t>0)\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x) & (0\leq x\leq l)\end{cases}$$

用分离变量法求出 $v(x,t)$,再由 v 得到原定解问题的解 u

$$u(x,t)=\frac{2a^2\pi}{l}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}A_n n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x}{A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x}$$

其中　$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

模拟试题 B

1. **试证圆锥形对称轴的纵振动方程为**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$,**其中** h **是圆锥的高。**

2. **求下列三维及二维波动方程初值问题的解。**

(1) $$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) & (-\infty<x,y,z<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=x^3+y^2z & (-\infty<x,y,z<+\infty)\\ u_t|_{t=0}=0 & (-\infty<x,y,z<+\infty)\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}) & (-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=x^2(x+y) & (-\infty<x,y<+\infty)\\ u_t|_{t=0}=0 & (-\infty<x,y<+\infty)\end{cases}$$

3. **求解下列定解问题**:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (-l<x<l,t>0)\\ u_x|_{x=-l}=u_x|_{x=l}=0 & (t>0)\\ u|_{t=0}=-x,u_t|_{t=0}=0 & (-l\le x\le l)\end{cases}$$

4. **求解**

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=\sqrt{x^2+y^2},x^2+y^2<1\\ u|_{x^2+y^2=1}=2\end{cases}$$

5. **求解下列定解问题**:

$$\begin{cases} u_t=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right) & (0<\rho<R,t>0)\\ u|_{t=0}=0 & (0\le\rho\le R)\\ u|_{\rho=R}=u_0 & (t>0)\\ |u||_{\rho=0}<\infty & (t>0)\end{cases}$$

6. **一个圆形薄膜,边界固定,膜从静止状态开始作自由径向振动,其阻力与速度成正比,已知初位移** $\varphi(\rho)$,**求位移函数。**

[答案与提示]

1. 提示:运用胡克定律,轴在 x 点处因变形而产生的弹性应力为

$$\text{弹性模量}\times\text{相对变形} = E\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\approx E\frac{u}{x}。$$

其中 E 为弹性模量,$S(x)$ 表示轴在 x 处的截面积,则 x 处整个截面上所受的力为 $E\frac{u}{x}S(x)$,由此可得位于 $[x,x+\Delta x]$ 这一段轴所受的力为

$$E\frac{u}{x}S(x)\Big|_{x+\Delta x}-E\frac{u}{x}S(x)\Big|_{x}\approx E\frac{}{x}\left[S(x)\frac{u}{x}\right]$$

现在的问题是要求出 $S(x)$,利用相似三角形边的比例关系可得 $S(x)$ 的半径为 $R\left(1-\frac{x}{h}\right)$,其中 R 为圆锥底的半径,故 $S(x)=\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$ $S(x)$ 求出来后,再对上述的小段锥台利用牛顿第二定律

2. 答案:(1) $u(x,y,z,t)=x^3+y^2z+3a^2xt^2+a^2zt^2$

(2) $u(x,y,t)=x^2(x+y)+(3x+y)a^2t^2$

3. 提示:用分离变量法,应注意两个问题,一是求解区间不是 $[0,l]$ 而是 $[-l,l]$,故在确定级数解中的系数时应将已知函数在 $[-l,l]$ 上展开;二是在确定特征值时要由一个代数方程组有非零解的条件来获得,即由 $X'(-l)=X(l)=0$,得

$$C\lambda\sin\lambda l+D\lambda\cos\lambda l=0,$$

$$-C\lambda\sin\lambda l+D\lambda\cos\lambda l=0$$

由 C,D 不能同时为零,故这代数方程组的系数行列式应该等于零,即

$$\begin{vmatrix}\lambda\sin\lambda l & \lambda\cos\lambda l\\ -\lambda\sin\lambda l & \lambda\cos\lambda l\end{vmatrix}=2\lambda^2\sin\lambda l\cos\lambda l=\lambda^2\sin 2\lambda l=0$$

由此得特征值　$\lambda_n=\frac{n\pi}{2l}$　　$(n=0,1,2,\cdots)$

有了特征值后，再由

$$X_n(x) = C\cos\frac{n\pi}{2l}x + D\sin\frac{n\pi}{2l}x$$

确定特征函数，例如取 $C = \cos\frac{n\pi}{2}$，$D = -\sin\frac{n\pi}{2}$，则

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2l}x - \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2l}x = \cos\frac{n\pi(x+l)}{2l} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$u(x,t) = \frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\cos\frac{(2n+1)a\pi}{2l}t$$

4. 提示：这个方程及边界条件都是非齐次性的，但由于边界曲线是个圆周，它的方程是 $x^2 + y^2 = 1$，不是变量分离的形式，故边界条件不易齐次化，现有两种解法，一种是在极坐标系求解，这时方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \rho$$

边界条件为 $u\big|_{\rho=1} = 2$

由于方程的自由项及边界数据都与 θ 无关，所以解也应不依赖于 θ，从而问题变成

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \rho \quad (\rho < 1)\\ u\big|_{\rho=1} = 2\\ \big|u\big|\,\big|_{\rho=1} < \infty\end{cases}$$

可以直接经过两次积分求出解

另一种方法就是先把方程化成齐次的，例如令

$$u = V + \frac{1}{9}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

这时得

$$\Delta V = 0,\ x^2 + y^2 < 1$$

然后求解拉普拉斯方程的一个边值问题。

5. 提示:在圆周上的边界条件是非齐次的,为了用分离变量法先要作未知函数代换将这个边界条件化成齐次的,例如令

$$u = V + u_0$$

$$u(P,t) = u_0\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)\right]$$

其中 μ_n 是 $J_0(x)$ 的正零点。

6. 提示:膜作自由径向振动,膜除受到阻力外不受其他外力,位移是径向,与方程(即 θ) 无关,就是求解下列问题。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) & (0 < \rho < R, t > 0)\\ u\Big|_{\rho = R} = 0 & (t > 0)\\ \Big|u\Big|\Big|_{\rho = 0} < \infty & (t > 0)\\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\rho),\ u_t\Big|_{t=0} = 0 & (\rho \leq R)\end{cases}$$

现在方程中多了一项 $2h\frac{\partial u}{\partial t}$(h 为一个充分小的正常数),所以分离变量后得到关于 $T(t)$ 的方程变成 $T'' + 2hT' + \lambda^2 a^2 T = 0$

这是一个常系数的二阶线性常微分方程,它的通解很容易写出来,其中 λ 应以特征值代入,即 $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}$, μ_n 是 $J_0(x)$ 的正零点,从而

$$T_n(t) = e^{-ht}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t)$$

其中
$$q_n = \sqrt{\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 - h^2}$$

$$u(P,t) = \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-ht}\left(\cos q_n t + \frac{h}{q}\sin q_n t\right)\frac{1}{J_1^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

其中
$$C_n = \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)\mathrm{d}r$$

参考文献

1　南京工学院数学教研组．数学物理方程与特殊函数(第三版)．北京:高等教育出版社,1982

2　谷超豪,李大潜等．数学物理方程．北京:高等教育出版社,2002

3　陈祖墀．偏微分方程．合肥:中国科学技术大学出版社,2003

4　黄大奎,舒慕曾．数学物理方法．北京:高等教育出版社,海森堡:施普格林出版社,2001

5　邵惠民．数学物理方法．北京:科学出版社,2004

6　何淑芷,陈启流．数学物理方法．广州:华南理工大学出版社,1994

7　谢鸿政,杨枫林．数学物理方程．北京:科学出版社,2001

8　王寿生等．数学物理方法．西安:西北工业大学出版社,1990

9　庄万等．数学物理方程．济南:山东科学技术出版社,2000

10　李惜雯．数学物理方法典型题．西安:西安交通大学出版社,2001

11　周绍森等．数学物理方法解题指导．南昌:江西高校出版社,1993

12　蔡日增,俞华英．数学物理方法与解题指导．长沙:湖南科学技术出版社,1988